

서울특별시교육청 수학·과학과 우수교사 위탁특별연수

교수- 학습 자료

• 개발년도 2010년

• 과 목 수 학

오류 들여다보기

• 제 목 - 산술 · 기하 평균의 관계를 이용하여 최대 · 최소 구하는 문제를 중심으로 -

• 개 발 자 조 희 선 (가락고등학교)

이 자료는 서울대학교 교육종합연구원 과학교육연구소가 서울특별시교육청으로부터 위탁받아 진행하고 있는 「수학·과학과 우수교사 위탁특별연수」 사업에서 개발되었습니다.



서울대학교 교육종합연구원 과학교육연구소

Seoul National University Center of Education Research Science Education Research Institute

오류 들여다보기

-산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소 구하는
문제를 중심으로-

개발자	조 희 선 (가락고등학교)
주제	오류 들여다보기 -산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소 구하는 문제를 중심으로-
관련 단위	고등학교 수학, 수학Ⅱ
	수학 :Ⅲ. 이차부등식과 절대부등식 3. 절대부등식의 증명 수학Ⅱ :Ⅳ. 미분법 3. 도함수의 활용
	산술·기하 평균의 관계, 최대·최소
활용대상	고등학교 3학년 이공계열 심화학습용
차 시	1차시
학습 목표	원리발견학습을 통하여 산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구하는 문제 풀이 과정에서의 오류의 원인을 진단하고 그 내용을 점검함으로써 개념을 정확히 이해하고, 응용한다.



1. 개요

(1) 개발 의도

오류의 의미를 국어사전에서 찾아보면 ‘행동이나 사고가 그릇되어 이치에 어긋나는 일’, ‘바르지 못한 논리적 과정 및 그 결과로 생긴 추리나 판단’으로 나와 있다.

오류는 문제에 대한 잘못된 해석, 정상적인 문제 해결 과정을 벗어나는 모든 추리, 판단, 계산을 포함한다. 어떤 추리는 잘못된 추리임에도 주의 깊게 생각하지 않으면 올바른 추리로 착각하기 쉽다.

학생들은 수학적 문제를 푸는 과정에서 다양한 오류를 범하는데, 이런 오류는 학생들이 학습 목표에 이르지 못하게 하고 그릇된 개념을 형성하도록 하지만, 교사들은 학생들이 문제 해결과정에서 오류를 범할 수 있는 여지를 허용함으로써 학생들의 수준에서 친숙하게 수학을 대하게 하고, 나아가 오류를 진단하고 재검토하고 극복함으로써 올바른 문제 해결로 진일보하도록 할 수 있다.

(2) 개발 자료 소개

본 수업자료는 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대 혹은 최소를 구하는 문제를 푸는 과정에서 학생들이 자주 저지르는 오류들을 제시하고, 그 오류들을 분석하고 탐구하는 과정을 안내함으로써 학생들이 오류의 원인을 깨닫고 잘못된 풀이를 수정·보완하여 관련된 개념을 보다 명확히 할 수 있도록 구성하였다.

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대 혹은 최소를 구하는 과정에서 학생들이 저지르는 오류는 다소 많은 유형이 있으며, 다소 많은 분야에서 나타난다. 본 자료에서는 그 중에서 학생들이 가장 많이 저지르는 대표적인 4가지 오류를 들여다 보며 그 원인을 분석할 수 있도록 구성하였다.

이 수업자료는 절대부등식으로서 산술평균과 기하평균의 관계를 처음 배우는 고등학교 1학년 학생들에게 적용하기 보다는 미분을 이용한 최대·최소를 배운 이후의 학생들 즉, 고등학교 2,3학년 학생들에게 적용하는 것이 보다 적합하다. 본 자료에서 다루는 오류가 주로 최대·최소를 구하는 과정에서 발생하기 때문이고, 또한 본 자료가 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 풀이와 미분을 이용한 풀이를 비교함으로

써 각각을 적용시킬 수 있는 조건에 대한 폭넓은 이해를 할 수 있게 하는 의도로 개발되었기 때문이다. 물론 문제에 따라 1학년에서 적용할 수 있는 내용만으로 구성된 것도 있으므로 선별적으로 활용가능하다. 전체 자료는 고등학교 3학년 이공계열 학생을 대상으로 한 심화학습에 활용할 수 있다.

2. 수업모형 안내

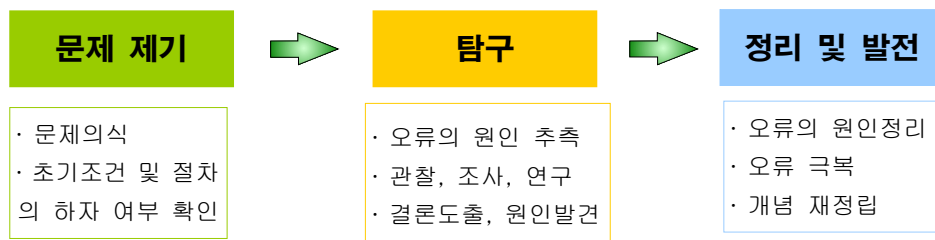
원리발견 학습모형

오류를 수정하기 위해서는 학생들이 가지고 있는 개념을 확인하고, 재구성하고, 변화시키는 과정이 필요하다.

원리발견학습은 학생들이 새로운 정보를 찾고자 하거나 새로운 결론에 도달하기 위하여 정보를 탐구, 조작, 변환시키는 결과로서 발생한다. 원리발견학습의 지도는 학생들로 하여금 원리발견을 할 수 있도록 학습내용이 구조화 된 상태에서 교사의 지시나 단계별 질의응답을 통하여 수행되며, 학생의 자발적 학습에 많은 비중을 두고 있다. 기본개념과 원리는 설명으로 주어지기보다 학생들이 스스로 깨닫게 되어야 하고 그러한 탐구과정에서 학습될 탐구능력과 태도를 중요시 한다.

원리발견학습은 탐구과정을 중심으로 한다. 즉, 구체적인 자료를 가지고 수학활동에 적극 참여하며, 개념을 형성하고 일반화하는 수단으로 탐구를 비롯한 추리, 예상, 분류 등의 과정을 사용한다. 원리발견학습의 목표는 첫째, 학생들에게 지도내용에 대한 개념 형성 및 일반화를 지도하는 것이고, 둘째, 관찰하고 추리하는 등의 탐구과정 기술을 습득하도록 하며, 셋째, 수학의 특성을 이해시키는 것이다. 이를 위하여 주어진 자료를 분석하고 비교하여 유용한 개념이나 일반화를 유도하는 과정 훈련과 더불어 개념형성을 강조한다.

본 수업자료에서는 학생들이 오류의 원인을 찾아내고, 풀이를 수정하고, 새로운 상황에 적용할 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 절차를 이용하였다.



3. 배경지식

가. 수학학습에서 오류의 구분과 역할

(1) 오류의 구분

대부분의 사람들이 오류는 학습과정에서 틀린 것을 상징한다는 부정적인 인식을 가지고 있으며 결과적으로 치료가 필요하다고 생각한다. 그러나 Borasi(노은정, 2002, 재인용)는 오히려 오류가 사고와 탐구를 자극할 수 있고 결과적으로 학문에 대해 더 깊은 이해를 할 수 있다고 긍정적인 역할을 강조한다.

수학학습을 위한 오류의 긍정적인 역할을 이야기하려면 수학에 관련하여 발생할 수 있는 모든 다양한 오류들을 고려해야 한다. 오류를 세세히 분석함으로써 학생들이 갖는 개념에 대하여 의미 있고 가치 있는 통찰이 이루어질 수 있으며, 이를 바탕으로 잘못된 이해에 대한 수정을 도울 수 있다. 김선주(2005)는 오류를 다음과 같이 6가지 유형으로 구분하였다.

A형 : 물음의 내용을 잘못 이해 또는 해석

B형 : 논리적으로 부적절한 추론

C형 : 잘못 이해하거나 숙련되지 못한 개념과 정리의 사용

D형 : 기술적 오류

E형 : 풀이과정을 생략한 오류

F형 : 해석 불가능하거나 애매한 오류

(2) 수학 학습에서의 오류의 역할

ㄱ) 오류가 어떻게 학습을 위해 사용될 수 있는가?

오류는 학습자 또는 연구자들을 자연스럽게 자극한다. 오류를 발견하면 결과가 원하는 대로 나오지 않는다는 사실을 깨닫게 되고, 원래의 목표를 이루기 위해서 처음에 주어진 모든 정보를 사용하여 방법을 수정하게 된다. 오류는 분석과 탐구를 위한 출발점이 된다. 처음의 예측이 항상 옳은 것은 아니다. 실패한 시도에서 나온 정보를 가지고 처음 예측에 재도전해야 한다. 기대되는 결과와 차이가 나는 것이 생기는 모든 경우에 오류에 대한 다음과 같은 일련의 질문들을 통하여 가치 있는 탐구를 이끌 수 있다.

㉠ 과정은 틀렸는데 답이 맞은 경우

- 이 경우 왜 옳은 답이 나오는가?
- 사용한 절차가 틀렸다면 이런 경우 논리적으로 어떻게 연결이 되는가?
- 사용한 절차가 어떤 성질에 의해서 특정 경우에만 사용되어지는 것인가? 그렇다면 그 성질은 무엇이고, 다른 경우에도 적용이 되는가? 적용되지 못하는 경우는 언제인가? 적용되기 위해서는 어떤 다른 조건이 더 필요한가?

㉡ 틀린 답에 대한 분석

- 어떤 의미에서 답이 틀렸는가?
- 사용한 절차의 어느 부분이 틀렸는가? 그것을 고칠 수 있는가? 고치면 다른 결과가 나오는가?
- 사용한 가정은 무엇이었나? 어떤 조건에서 그 가정이 정당화되는가?

㉢ 틀린 답에 대한 도전

- 틀린 답을 인정한다면? 옳은 답은 어떻게 바꿀 수 있는가?
- 어떤 조건에서 틀린 답이 옳을 수 있는가?
- 어떤 다른 수학적 체계에서 그 틀린 답이 옳을 수 있는가?

㉣ 정의에 대한 오개념 분석

- 생각한 정의에서 나올 수 있는 성질들은 어떤 것들이 있는가?
그 성질들이 개념에 대한 이미지에 모두 적합한가?
- 그 개념의 어떤 예들이 생각한 정의에 의하여 설명되지 않는가?
- 사용된 용어의 의미는 무엇인가?
- 모든 성질들이 필수적인 것인가? 빼도 상관없는 것이 있는가?
- 생각한 정의를 어떻게 고칠 수 있는가?

㉤ 잘못된 정의에 대한 도전

- 생각한 것이 그 개념의 옳은 정의라면 어떤 일이 생기는가? 개념은 어떻게 바뀔까? 원래의 개념과 비교하면 무엇이 다를까?
- 생각한 정의를 받아들인 결과는 무엇인가?
- 생각한 정의가 수정될 여지가 있는가? 어떤 대안적인 개념이 창조될 수 있는가?
- 왜 수학자들은 그러한 정의를 선택했을까?

⑥ 부족한 모델에 대한 평가

- 사용한 모델이 어떤 면에서 중요하다고 생각했는가?
- 사용한 모델이 어떤 의미에서 적용된다고 생각했는가?
- 사용한 모델을 유용한 아주 좋은 모델과 비교한다면?
- 사용한 모델은 개념의 어떤 측면을 설명하지 못하는가?
- 사용한 모델을 더 적절하게 만들려면 어떻게 수정하여야 하는가?
- 사용한 모델에 한계가 있었는가? 아니면 개념 자체가 한정되어 있었는가?

ㄴ) 수학을 학습하는 학생들에게 있어 오류 사용의 가치

오류는 탐구에 필요한 여러 가지 질문을 만들어내는 잠재력이 있다. 수학자들이 오류의 이러한 능력을 사용하고 있음은 당연한 일이다. 탐구를 위해 오류를 사용하는 것은 천재들만이 하는 것이 아니다. 학생들도 자신의 수준에서 수학의 기초에 대한 이해를 얻는 데에 오류의 도움을 얻을 수 있다. 오류의 분석이 문제와 관련된 기본적인 내용을 더 잘 이해하도록 도와주고, 유용하고 타당한 문제풀이를 찾는 것과 문제의 재구성을 도울 수 있다.

학생들이 자신의 오류를 분석하고, 그것을 고치려고 노력하는 과정을 교사가 담담해 버리면 그것은 학생들에게서 아주 좋은 성장의 기회를 빼앗는 것이다. 오류의 분석은 학생들을 문제해결과정에 참여시킨다. 무엇보다도 오류의 원인을 발견하고 그것을 고치는 과정은 학생들에게 있어서 극도의 자극이 된다. 오류를 고치는 것은 간단히 공식을 적용하거나 유사한 문제의 접근법을 단순 적용하는 것과는 다르므로 학생들에게 실제적인 ‘문제해결전략’이 필요할 것이고 성공하기까지 몇 가지 시도를 해 봐야 하며, 그 결과 또한 어떤 방향으로 오류를 수정하느냐에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있다.

이 때 교사가 해야 할 중요한 역할은 학생이 오류를 고치려고 시도하기 전에 오류의 원인을 명확히 하는데 도움이 되는 적절한 질문을 하는 것이다. 복잡한 문제를 해결하고 근본적으로 개선된 결과를 창조하기 위해서는 알맞은 질문을 하는 능력이 아주 중요하다. 특히 수학수업에서 학생들은 이러한 능력을 기르기 위한 경험이 부족하기 때문에 사용한 전략을 일반화하는데 실패하곤 한다. 사실 충분한 자극 없이 주어진 상황으로부터 문제를 일반화하는 것은 쉽지 않다. 오류와 관련된 적절한 질문이 바로 이러한 자극을 자연스럽게 제공하여 줄 것으로 생각한다.

또한 수학적 내용의 이해의 부분에 있어서도 오류의 적절한 사용은 많은 도움이 된다. 보통 생각하는 것과는 달리 검증이 끝난 확정된 지식을 직접적으로 설명하는 것

은 학생들이 이해하며 배우는 데에 있어 가장 좋은 방법이 아닐 수도 있다. 창조적인 탐구 활동을 통해 발견과 문제 제기 및 문제 해결 과정을 거쳐 학생들이 수학적 주제들에 대한 더 나은 이해를 할 수 있을 것이다. 오류는 이러한 활동을 자연스럽게 동기화할 수 있다.

수학적 주제들을 다루면서 중요한 부분을 빠뜨린 경험들이 다들 있을 것이다. 심지어는 빠뜨렸다는 사실을 모르고 있다가 어떤 일에 의해서 불현듯 깨닫기도 한다. 사실 오류는 ‘모순’을 통하여 자신의 무의식적인 믿음과 이미지를 깨닫게 해준다. 이것이 다시 생각하고 궁극적으로는 자신이 가진 개념을 수정하게 하는 첫걸음이 될 수 있다.

마지막으로 오류에서 모순의 존재나 받아들이 수 없는 결과들은 숙고와 연구를 자극할 수 있다. 어떤 오류를 상세히 분석함으로써 수학적 주제들이나 방법론을 더 잘 이해할 수 있으며 더 나아가 개념적 한계와 이면을 깨달을 수 있다.

나. 산술·기하평균의 관계를 이용한 최대·최소 문제 해결 과정의 오류

고등학생들이 평균하면 일반적으로 떠올리는 것이 산술 평균과 기하 평균이다. 실제로 산술 평균과 기하 평균의 관계¹⁾는 최대 또는 최소의 문제를 접근할 때 매우 유용하게 사용되고 있지만 그 내용과 쓰임을 정확히 알지 못하는 학생들이 많다. 심지어는 양수라는 조건만으로 산술·기하 평균의 관계를 사용하여 문제의 답을 구하는 오류를 범하는 것을 자주 보게 된다. 그리고 나서 많이 하는 질문이 바로 “왜 이렇게 하면 안돼요?” 이다. 학생들이 흔히 저지르는 오류들을 유형별로 분석하면 다음과 같다.

(1) 논리적으로 부적절한 추론

이 오류는 산술·기하 평균의 관계를 사용하여 문제를 풀었지만 잘못 사용해서 나타나는 오류로서 한 문제에서 산술·기하 평균의 관계를 두 번 이상 사용했을 때나 여러 번 부등식을 이용할 때 흔하게 발생하는 유형이다.

<예시문제1> $x > 0, y > 0$ 일 때, $(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x})$ 의 최솟값을 구하여라.

1) $a \geq 0, b \geq 0$ 이면 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 이다. (단, 등호는 $a=b$ 일 때, 성립한다)

<잘못된 풀이>

$$(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) \stackrel{\textcircled{L}}{=} 2\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot 2\sqrt{\frac{4y}{x}} \stackrel{\textcircled{㉠}}{=} 4\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}} = 8$$

따라서 최솟값은 8이다.

<옳은 풀이>

$$(x + \frac{1}{y})(y + \frac{4}{x}) = xy + 4 + 1 + \frac{4}{xy} \geq 5 + 2\sqrt{xy \cdot \frac{4}{xy}} = 9$$

따라서 최솟값은 9이다.

<오류 원인>

산술·기하 평균의 관계를 두 번 연속 사용하는 과정에서 등식이 성립할 조건이 ㉠에서는 $x = \frac{1}{y}$ 이고, ㉡에서는 $y = \frac{4}{x}$ 로 동시에 만족시키는 x, y 값은 존재하지 않는다. 따라서 식의 값이 8보다 ‘크거나 같다’는 것은 맞지만 ‘같은’ 경우는 성립하지 않으므로 8을 최솟값이라고 할 수는 없다.

(2) 잘못 이해하거나 숙련되지 못한 개념과 정리의 사용

이 오류는 산술·기하 평균의 관계나 사용된 다른 수학적 내용에 대한 개념이 부족하여 정리나 정의를 잘못 사용하여 나타나는 오류이다. 곱이 일정함을 확인하지 않는 경우나 등호 성립 조건만 사용하여 답을 이끌어내는 경우에 주로 발생한다.

ㄱ) 세 수의 산술·기하 평균의 관계를 사용할 문제

<예시문제2> $x > 0$ 일 때, $2x^2 + \frac{4}{x}$ 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 최솟

값을 구하여라.

<잘못된 풀이①>

$$x > 0 \text{ 이면 } 2x^2 > 0, \frac{4}{x} > 0 \text{ 이므로}$$

산술·기하 평균의 관계에 의하여 $2x^2 = \frac{4}{x}$ 일 때 최소가 된다.

$$x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \text{ 일 때 최소이며}$$

$$\text{그 때의 최솟값은 } 2\sqrt[3]{2} + \frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2^8} = 4\sqrt[3]{2} \text{ 이다.}$$

<잘못된 풀이②>

$$2x^2 = \frac{4}{x} \text{ 일 때 최소이며}$$

$$\text{그 때의 최솟값은 } 2x^2 + \frac{4}{x} = 2\sqrt{2x^2 \times \frac{4}{x}} = 4\sqrt{2x} \text{ 이므로}$$

$$x = \sqrt[3]{2} \text{ 에서 최솟값은 } 4\sqrt{2\sqrt[3]{2}} \text{ 이다.}$$

<옳은 풀이㉑>

$$x > 0 \text{ 이므로}$$

$$2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \times \frac{2}{x} \times \frac{2}{x}} = 6$$

$$\text{등호는 } 2x^2 = \frac{2}{x} = \frac{2}{x} \text{ 일 때 성립하므로}$$

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ 일 때, 최솟값은 6이다.}$$

<오류 원인>

잘못된 풀이①,②에서는 주어진 두 항이 양수이므로 산술·기하 평균의 관계를 사용해도 된다고 생각했지만 두 수에 대한 관계가 아니라 세 수에 대한 관계②를 사용해야 했다. 두 수에 대한 관계를 이용한 잘못된 풀이에는 최솟값부분에 미지수 x 가 포함되어 있다. 이로 인하여 두 수의 곱이 일정하지 않게 되었다. 산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소 문제를 풀 때에는 세 가지 조건(㉠ 양수 ㉡ 부등식의 방향 ㉢ 곱 또는 곱이 일정)을 만족해야 한다는 개념이 부족했기 때문에 오류가 생긴 것이다.

세 수에 대한 관계를 사용할 때에도 조심해야 하는데,

$$\text{만약 } \frac{4}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \text{ 라 하지 않고, } \frac{4}{x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x} \text{ 이라고 한다면 우변의}$$

곱은 일정하게 되어

$$2) \text{ n 개의 양수 } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 에 대하여 } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ 이다.}$$

이 때 등호는 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 일 때 성립한다.

$$2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x} \geq 3 \sqrt[3]{2x^2 \times \frac{1}{x} \times \frac{3}{x}} = 3 \sqrt[3]{6} \quad \text{가 되지만}$$

여기서 최솟값을 $3 \sqrt[3]{6}$ 이라고 하면 등호 $2x^2 = \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$ 가 동시에 성립하지 않으므로 역시 오류를 범하게 된다.

세 수에 대한 산술·기하 평균의 관계는 교과서에서 다루지 않기 때문에 미적분을 배운 경우에는 다음과 같은 풀이가 가능하다.

<옳은 풀이⑤>

주어진 식 $2x^2 + \frac{4}{x}$ 의 값을 y 라 하고 함수 $y = 2x^2 + \frac{4}{x}$ 의 $x > 0$

일 때 증가·감소를 알아보기 위하여 미분을 하면

$$y' = 4x - \frac{4}{x^2} = \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} \quad \text{이므로}$$

$0 < x < 1$ 에서 감소, $x > 1$ 에서 증가이므로

$x = 1$ 일 때 최소가 되고, 최솟값은 $y = 2 + 4 = 6$ 이다.

ㄴ) 곱이 일정함을 잘못 사용한 문제

<예시문제3> $x > 0$, $y > 0$ 이고 $y^{\log_2 x} = 4$ 일 때, xy^2 의 값이 취하는 범위를 구하여라.

<잘못된 풀이>

양변에 밑이 2인 로그를 취하면 $\log_2 x \log_2 y = 2$

$xy^2 = k$ 라 하고 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 k = \log_2 x + \log_2 y = \log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} \quad \dots \textcircled{1} \text{ 이고}$$

$$\log_2 x + \frac{4}{\log_2 x} \geq 2 \sqrt{\log_2 x \cdot \frac{4}{\log_2 x}} = 4 \quad \text{이므로 } \log_2 k \geq 4$$

$$\therefore k \geq 16$$

<옳은 풀이④>

위의 ①의 양변에 $\log_2 x$ 를 곱하면

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 k \log_2 x + 4 = 0 \text{ 이고}$$

$x > 0$ 이므로 $\log_2 x$ 는 실수이다. 따라서 판별식을 사용하면

$$(\log_2 x)^2 - 16 \leq 0 \quad \text{이고} \quad \log_2 k \leq 4, \log_2 k \geq -4$$

$$\therefore k \leq 16, \quad 0 < k \leq \frac{1}{16}$$

<옳은 풀이 ㉞>

㉞에서 $\log_2 x$ 와 $\frac{4}{\log_2 x}$ 는 같은 부호이므로 양변에 절댓값을 씌우면

$$|\log_2 k| = |\log_2 x| + \left| \frac{4}{\log_2 x} \right| \leq 2\sqrt{|\log_2 x| \cdot \left| \frac{4}{\log_2 x} \right|} = 4$$

$$\log_2 k \leq 4, \log_2 k \geq -4 \quad \therefore k \leq 16, \quad 0 < k \leq \frac{1}{16}$$

<오류 원인>

$x > 0$ 일 때 $\log_2 x > 0$ 이라고 착각하여 곱이 일정함을 바로 사용함으로써 오류를 낳았다. 옳은 풀이 ㉞와 같이 절댓값을 사용함으로써 이와 같은 오류를 범하지 않을 수 있다.

<예시문제4> $a > 3$ 일 때, $\frac{a^2 - 4a + 7}{a - 3}$ 의 최솟값을 구하여라.

<잘못된 풀이>

$$\frac{a^2 - 4a + 7}{a - 3} = \frac{(a - 1)(a - 3) + 4}{a - 3} = (a - 1) + \frac{4}{a - 3} \dots \text{㉞} \quad \text{이고}$$

$$a - 1 > 0, \quad \frac{4}{a - 3} > 0 \quad \text{이므로 산술·기하 평균의 관계를 이용하면}$$

$$a - 1 + \frac{4}{a - 3} \geq 2\sqrt{\frac{4(a - 1)}{a - 3}} \quad \text{에서 최솟값은 존재하지 않는다.}$$

<옳은 풀이>

$$\text{㉞에서} \quad a - 1 + \frac{4}{a - 3} = a - 3 + \frac{4}{a - 3} + 2 \geq 2\sqrt{4} + 2 = 6 \quad \text{이므로}$$

최솟값은 6이다.

<오류 원인>

곱이 일정하게 나오도록 식을 변형하면 되는 문제인데, 잘못된 풀이에서는 이것을 이용하지 못함으로써 최솟값이 존재하지 않는 것으로 결론을 내렸다. 이는 곱이 일정하게 나오지 않은 두 변수를 단지 양수라는 조건만 보고 산술·기하 평균의 관계를 무조건 사용하는 생각으로부터 발생한 오류이다.

(3) 증명하지 않고 적용하는 오류

이 오류는 산술·기하 평균의 관계를 사용하면 안 되는 경우인데 사용을 하거나, 증명 없이 임의대로 추정하여 발생하는 오류로서 해석 기하, 집합 관련 문제에서 많이 발생한다.

ㄱ) 최단거리 문제

<예시문제5> 평면 위에 두 점 A(0, 3), B(5, 2)와 x 축 위의 동점 P(x, 0)에 대하여

$\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소가 되는 점 P의 위치와 그 최솟값을 구하여라.

<잘못된 풀이>

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 는 모두 길이로 양수이므로 산술·기하 평균의 관계에 의해서 최솟값은 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 일 때 갖는다.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (0-2)^2}$$

$$x^2 + 9 = x^2 - 10x + 25 + 4, \quad 10x = 20 \quad \therefore x = 2$$

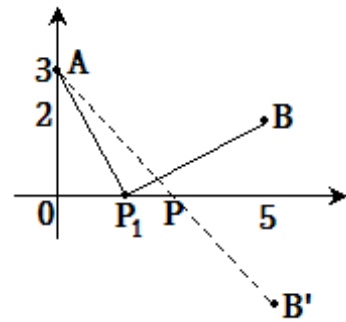
즉, 점 P의 위치는 (2, 0)이고 그 때의 최솟값은 $2\sqrt{13}$ 이다.

<옳은 풀이>

그림에서 우리가 찾으려는 점을 P_1 이라 하자. 점 B를 x 축에 대칭이동한 점을 B' 라 하면 삼각형의 합동에 의하여

$$\overline{AP_1} + \overline{P_1B} = \overline{AP_1} + \overline{P_1B'} \in \overline{AB'}$$

따라서 최소가 되는 점 P_1 의 위치는 $\overline{AB'}$ 와 x 축의 교점(3,0) 이고, 그 때 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.



<오류 원인>

길이가 양수라는 것만 생각하고, 증명 없이 단순 추정만으로 최솟값을 가질 것이라고 생각하여 생길 수 있는 오류이다.

산술·기하 평균의 관계를 이용하면

$$\overline{AP} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{AP} \times \overline{PB}} = 2\sqrt{\sqrt{x^2+9} \sqrt{x^2-10x+29}}$$

$$= 2 \sqrt{\sqrt{x^4 - 10x^3 + 38x^2 - 90x + 261}}$$

이 되어서 최솟값을 결정하기에 적절하지 못하다.

<예시문제6> 양수 x, y 에 대하여 $x - y = 3$ 을 만족시킬 때,

$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 25}$ 의 최솟값을 구하여라.

<잘못된 풀이>

$\sqrt{x^2 + 4} > 0, \sqrt{y^2 + 25} > 0$ 이므로 산술·기하 평균의 관계에 의하여
최솟값은 $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{y^2 + 25}$ 일 때 존재한다.

$$\text{즉, } x^2 - y^2 = 21 \quad \Rightarrow \quad (x + y)(x - y) = 21$$

$x - y = 3$ 이므로 $x + y = 7$ 이고, 이 두 식을 연립하여 풀면

$x = 5, y = 2$ 따라서 최솟값은 $2\sqrt{29}$ 이다.

<옳은 풀이>

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y^2 + 25} = \sqrt{x^2 + 2^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 5^2}$$

이 식은 x 축 위의 점 $(x, 0)$ 에서 두 점 $(0, 2), (3, 5)$ 까지의 거리의 합을 나타낸다. $(3, 5)$ 를 x 축에 대칭 이동시키면 $(3, -5)$ 이고, 최단거리는 $(0, 2)$ 에서 $(3, -5)$ 까지의 거리와 같으므로

$$\text{최솟값은 } \sqrt{3^2 + (-5 - 2)^2} = \sqrt{58} \text{ 이다.}$$

<오류 원인>

이 문제는 <예시문제5>와 같은 내용의 문제이다. 단지 그림이 나와 있지 않기 때문에 보다 많은 오류를 범하게 된다. 이 문제 역시 산술·기하 평균의 관계를 사용하면 안 되는 경우임에도 단지 양수라는 조건과 합의 최솟값을 구하라는 모양만 보고 산술·기하 평균의 관계를 사용함으로써 오류가 생겼다.

이렇게 식만 주어졌을 때, 학생들은 문제를 식으로만 풀려고 하면서 산술·기하 평균의 관계에 더 끌리게 되고 식과 도형의 연관성을 망각한 채 오류를 범하게 된다.

ㄴ) 넓이 문제

<예시문제7> 넓이가 4π 인 원의 내부에 임의의 점 P 가 있다. 이 점 P 를 지나는 현

에 의해서 만들어지는 두 활꼴의 넓이를 각각 S_1, S_2 라고 할 때,
 $4S_1^{2r} + S_2^{2r}$ 의 최솟값을 구하여라.

<잘못된 풀이①>

$S_1 + S_2 = 4r$ 이고, $S_1 > 0, S_2 > 0$ 이므로
 $2\sqrt{S_1 S_2} \leq S_1 + S_2 = 4r$ 에서 $S_1 S_2 \leq 4r^2$ 이고
 $4S_1^{2r} + S_2^{2r} \geq 2\sqrt{4S_1 S_2} = 4S_1 S_2 \leq 16r^2$ 에서
 최솟값은 $16r^2$ 이다.

<잘못된 풀이②>

$S_1 + S_2 = 4r$ 이고, $S_1 > 0, S_2 > 0$ 이므로
 $4S_1^{2r} + S_2^{2r} \geq 2\sqrt{4S_1 S_2}$ 에서 등호는 $4S_1^{2r} = S_2^{2r}$ 일 때 성립하므로
 $2S_1^r = S_2^r$ 즉 $S_1 = \frac{4r}{3}, S_2 = \frac{8r}{3}$ 일 때 최솟값은 $\frac{128}{9}r^2$ 이다.

<옳은 풀이a>

코시-슈바르츠 부등식³⁾에 의하여

$$\left(\frac{1}{2^{2r}} + 1^2\right)((2S_1)^{2r} + S_2^{2r}) \geq (S_1 + S_2)^{2r}$$

$$\frac{5}{4}(4S_1^{2r} + S_2^{2r}) \geq (4r)^{2r} \quad \therefore 4S_1^{2r} + S_2^{2r} \geq \frac{64}{5}r^{2r}$$

최솟값은 $\frac{64}{5}r^{2r}$ 이다.

<옳은 풀이b>

$S_1 + S_2 = 4r$ 를 이용하면

$$4S_1^{2r} + S_2^{2r} = 4S_1^{2r} + (4r - S_1)^{2r} = 5S_1^{2r} - 8rS_1 + 16r^2$$

$$= 5\left(S_1 - \frac{4r}{5}\right)^{2r} + \frac{64}{5}r^{2r} \quad \text{에서}$$

$S_1 = \frac{4r}{5}$ (즉 $S_2 = \frac{16}{5}r$)일 때 최솟값은 $\frac{64}{5}r^{2r}$ 이다.

<오류 원인>

잘못된 풀이①에서는 부등식의 방향이 틀렸음에도 불구하고 그냥 답을 하였으며, 잘못된 풀이②에서는 두 번의 등식의 성립조건이 다르다는 것을 생각지 못하였다. 이 문제에서의 오류는 넓이는 무조건 양수이고 그래서 산

3) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

술·기하 평균의 관계를 사용해도 된다고 잘못 판단했기 때문이다. 양수라는 조건은 산술·기하 평균의 관계를 성립하게 하는 필요조건이지 충분조건이 아니다. 따라서 양수라는 조건이 함정이 될 수 있음을 유의하여야 한다.

ㄷ) 집합 문제

<예시문제8> $U = \{1, 2, 3, 8\}$ 에 대하여 $A^*B = U$, $A)B = |$ 이고 집합 A 의 원소의 총합을 $f(A)$, 집합 B 의 원소의 총합을 $f(B)$ 라고 할 때, $f(A) \times f(B)$ 의 최댓값을 구하여라.

<잘못된 풀이>

$$f(A) + f(B) = 14$$

$$\sqrt{f(A)f(B)} \leq \frac{f(A) + f(B)}{2} = 7 \quad \therefore f(A)f(B) \leq 49$$

따라서 최댓값은 49이다.

<옳은 풀이>

각 경우에 따라 집합 A 와 집합 B 의 원소를 직접 정하여 보자

$A = |$, $B = \{1, 2, 3, 8\}$ 일 때

$$f(A) = 0, \quad f(B) = 14 \quad \Rightarrow \quad f(A)f(B) = 0$$

$A = \{1\}$, $B = \{2, 3, 8\}$ 일 때

$$f(A) = 1, \quad f(B) = 13 \quad \Rightarrow \quad f(A)f(B) = 13$$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 8\}$ 일 때

$$f(A) = 3, \quad f(B) = 11 \quad \Rightarrow \quad f(A)f(B) = 33$$

⋮

이렇게 나누었을 때 최대가 되는 경우는 다음 경우이다.

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{8\}$ 일 때

$$f(A) = 6, \quad f(B) = 8 \quad \Rightarrow \quad f(A)f(B) = 48$$

따라서 최댓값은 48이다.

<오류 원인>

합이 일정하기 때문에 산술·기하 평균의 관계를 사용할 수 있는 것처럼 보이지만 실제로는 곱이 49가 되도록 하는 집합 A 와 B 가 존재하지 않는다. 또한 $f(A) = f(B)$ 도 성립될 수 없다. 이와 같은 문제는 산술·기하 평균의 관계를 사용하면 안 되는데 사용하여 오류가 발생하였다.

이상의 오류들을 살펴봄으로써 산술·기하 평균의 관계를 사용하여 최대·최소를 구하는 문제를 지도할 때 받을 수 있는 시사점들은 다음과 같다.

첫째, 산술·기하 평균의 관계가 성립하려면 양수라는 조건 뿐 아니라 합이나 곱이 일정해야 곱의 최댓값 또는 합의 최솟값을 구할 수 있음을 지도해야 한다.

둘째, 합 또는 곱이 일정하지 않을 때 사용하는 등호의 성립 조건이 오류를 낳게 하므로 등호의 성립 조건을 무조건 사용하기 이전에 합 또는 곱의 일정함을 따져야 한다.

셋째, 산술·기하 평균의 관계를 여러 번 사용할 때에는 등호의 성립조건이 같은지 확인해야 하며, 가능한 산술·기하 평균의 관계를 한 번만 사용하여 문제에 접근하도록 한다.

넷째, 기하 문제와 대수 문제의 접근 방법과 해결 과정에서의 차이점을 인식시켜야 하며, 단원 간의 연관성 및 수식과 도형, 그래프와의 연관성을 폭넓게 지도하여야 한다.

교사는 학생이 무엇을 할 수 있는지, 또는 무엇을 못하고 있는지 관찰해야 하고, 학생들이 능력별로 어떤 절차를 사용하고 있는지도 확인할 필요가 있다. 학습과정에서 발생하는 오류 중 결과 보다는 과정에서 발생하는 오류에 관심을 두어 학생들의 문제 해결 능력의 신장에 도움이 되어야 한다.

4. 학생의 개념

[정의] 산술평균 : 두 수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2}$

기하평균 : 두 양수 a, b 에 대하여 $\sqrt{ab}$

[산술평균과 기하평균의 관계] 두 양수 a, b 에 대하여 부등식

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

는 항상 성립한다. 단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.



산술·기하 평균의 관계와 최대 최소(1)

()년 ()월 ()일 ()학년 ()반 ()번 이름 ()

산술평균과 기하평균의 대소 관계는 어떤 조건 하에서 성립하는가?

1. 학습목표

- 산술평균과 기하평균의 관계에 대한 절대부등식이 성립하는 조건을 정확히 이해한다.
- 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 때 성립해야 하는 조건들을 정확히 이해한다.

절대부등식 : 모든 x 의 값에 대하여 항상 성립하는 부등식
 조건부등식 : 어떤 특정한 범위의 x 의 값에 대해서만 성립하는 부등식

2. 과정

 알고 있나요?

1. 산술평균과 기하평균의 관계

(1) 두 양수 a, b 에 대하여 산술평균($\frac{a+b}{2}$)과 기하평균($\sqrt{ab}$)사이의 관계를 부등식으로 나타내어 보아라.

(2) 위에서 나타낸 부등식을 증명하여 보아라.

$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ 임을 이용

(3) 위의 부등식이 성립함에 있어서 두 수 a, b 가 양수이어야 하는 이유는 무엇인가?



오류 들여다보기 - x 의 조건을 잘 따져 보았나요?

2. 다음은 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하는 과정이다. 물음에 답하여라.

(문제) $x \geq 0$ 일 때, $x + 2 + \frac{1}{x+2}$ 의 최솟값을 구하여라.

(풀이) $x \geq 0$ 이면 $x+2 > 0$ 이므로

산술기하 평균의 관계에 의해서

$$x+2 + \frac{1}{x+2} \geq 2\sqrt{(x+2) \frac{1}{x+2}} = 2$$

가 성립한다.

그러므로 좌변의 식 $x+2 + \frac{1}{x+2}$ 의 최솟값은 2이다.

- (1) 위의 풀이는 어떤 조건을 보고 문제를 푼 것인가?

$x+2$ 와 $\frac{1}{x+2}$ 둘 다

양수라는 조건도 만족하고, 곱도 일정하므로 풀이과정이 잘못되었다고 느끼기 쉽지 않은 문제이므로, 우선 학생들이 주어진 풀이에 어느 정도 공감하는지를 확인하는 과정이다.

- (2) 위의 풀이에서 잘못된 곳이 있다고 생각하는가?

- (3) x 에 몇 개의 값을 대입하여 주어진 식 $x+2 + \frac{1}{x+2}$ 의 값을 구하는 다음 표를 완성하여 보자.

x	$x+2 + \frac{1}{x+2}$
0	
1	
2	
3	

x 를 대입하여 식을 값을 계산하여 봄으로써 값의 변화에 대하여 구체적으로 이해할 수 있다.

(4) 양수 $x \in 0$ 에 대하여 식 $x+2+\frac{1}{x+2}$ 의 값이 2가 될 수 없음을 증명하여 보아라.

(5) 식 $x+2+\frac{1}{x+2}$ 의 값이 2일 때의 x 의 값을 구해보자.

등호가 성립할 때의 x 값을 구하도록 함으로써 최소일 때의 x 값이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

(6) 처음에 주어진 풀이가 어떤 오류를 범하였는지, 그와 같은 오류를 범하지 않기 위하여 무엇을 주의하여야 하는지 정리하여 보아라.

(7) 양수 $x \in 0$ 에 대하여 식 $x+2+\frac{1}{x+2}$ 의 최솟값을 제대로 구하고, 그것이 왜 타당한지 설명하여라.

미분을 이용하여 함수 $y = x+2+\frac{1}{x+2}$ 의 증가감소를 확인하고 그것을 이용하여 최솟값을 구할 수 있도록 한다.



산술·기하 평균의 관계와 최대·최소(2)

()년 ()월 ()일 ()학년 ()반 ()번 이름 ()

양수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2}$ 의 최솟값은 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 일 때 갖는가?

1. 학습목표

- 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 때 성립해야 하는 조건들을 정확히 이해한다.
- 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구하는 과정에서 범할 수 있는 오류들을 살펴보고, 유의점을 정리한다.

2. 과정

 과연 맞는 말인가요?

1. 다음은 정훈이가 산술기하평균의 관계를 이용하여 합과 차의 최대·최소에 대하여 이끌어낸 결론이다. 물음에 답하여라.

“두 수 $a \geq 0, b \geq 0$ 에 대하여 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 는 항상 성립하고, 이 부등식에서 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.”
 $\Rightarrow$ (결론1) $a = b$ 일 때 $a+b$ 가 최솟값을 갖는다.
 (결론2) $a = b$ 일 때 $2\sqrt{ab}$ 가 최댓값을 갖는다.

산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소의 문제를 풀 때 가장 많이 저지르는 오류가 등호가 성립할 때 무조건 최대·최소가 된다고 생각하는 오류이다.

- (1) 정훈이의 결론이 옳다고 생각하는가? 혹은 틀렸다고 생각하면 그 이유를 말하여라.

- (2) 정훈이의 결론이 성립하기 위하여 부족한 조건이 있다고 생각하는가?

 오류 들여다보기 - 등호가 만능인가?

2. 다음은 은영이가 정훈이의 결론에 부족하다고 생각하는 조건을 추가하여 만든 문제와 그 풀이이다. 물음에 답하여라.

(문제) 두 수 $a \geq 0$, $b \geq 0$ 에 대하여 $b = \frac{a}{2} + 1$ 일 때

$a + b$ 의 최솟값과 $2\sqrt{ab}$ 의 최댓값을 구하여라.

(풀이) $a \geq 0$, $b \geq 0$ 이므로 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 이고

여기서 등호는 $a = b$ 일 때 성립하므로

$a = \frac{a}{2} + 1$ 즉 $a = 2$ 일 때 등호가 성립한다.

따라서 $a + b$ 의 최솟값은 $2 + 2 = 4$ 이고

$2\sqrt{ab}$ 의 최댓값도 $2\sqrt{4} = 4$ 이다.

a 와 b 사이에 적당한 관계가 있으면 최댓값, 최솟값을 구할 수 있을 것이라고 생각하는 경우를 짚어보기 위한 문제이므로 관계식 $b = \frac{a}{2} + 1$ 은 다른 식으로 바꾸어 학생들에게 또한 한 번 풀어보게 하는 것도 권장한다.

- (1) 은영이가 추가한 조건은 무엇인가?
- (2) 은영이가 추가한 조건이 $a + b$ 의 최솟값과 $2\sqrt{ab}$ 의 최댓값을 결정하는데 어떤 역할을 하였는가?
- (3) 위의 풀이에서 잘못된 곳이 있다고 생각하는가?
- (4) a 가 가질 수 있는 가장 작은 값과 b 가 가질 수 있는 가장 작은 값을 구하여라. 두 값이 동시에 성립하는가?

a 와 b 사이에 적당한 관계가 있는 경우에는 반드시 동시에 성립하는 값으로 최댓값 또는 최솟값을 구하도록 한다.

- (5) 위에서 구한 값을 참고하여 $a + b$ 의 최솟값을 구하여보자. ' $a = b$ 일 때 $a + b$ 가 최솟값을 갖는다'고 말할 수 있는가?

- (6) $b = \frac{a}{2} + 1$ 이므로 $a + b = \frac{3}{2}a + 1$ 이라고 할 수 있다.

그러면, $a + b$ 의 값의 범위는 어떻게 되는가?

주어진 식을 한 문자에 관하여 정리하는 것이 그 식의 값의 범위를 살펴보기에 가장 편리하므로 이를 적절히 활용할 수 있도록 지도한다.

- (7) a 가 가질 수 있는 가장 큰 값과 그 때의 b 의 값을 구하여라. 이 값을 참고하여 $2\sqrt{ab}$ 의 최댓값을 구하여보자.

- (8) $b = \frac{a}{2} + 1$ 을 이용하여 식 $2\sqrt{ab}$ 을 a 에 관하여 정리하고, $a \geq 0$ 일 때 $2\sqrt{ab}$ 의 값의 범위를 구하여라.

변수가 포함되어 있는 식의 값은 변수의 범위에 따라 결정됨에 유의하게 한다.

- (9) 은영이의 풀이가 어떤 오류를 범하였는지, 그와 같은 오류를 범하지 않기 위하여 무엇을 주의하여야 하는지 정리하여 보아라.

탐구과정에서 알아낸 오류와 그 원인을 정리하고, 조심해야 할 조건들을 살펴볼도록 한다.



산술·기하 평균의 관계와 최대·최소(3)

()년 ()월 ()일 ()학년 ()반 ()번 이름 ()

산술·기하 평균의 관계를 여러 번 사용해도 괜찮을까?

1. 학습목표

- 산술평균과 기하평균의 관계를 여러 번 이용하여 최대·최소를 구할 때 조심해야 하는 조건들을 정확히 이해한다.
- 최대·최소를 구할 때 이용할 수 있는 다른 방법들을 살펴보고 그 장단점을 비교한다.

2. 과정

이렇게 하면 되나요?

1. 다음은 산술·기하 평균의 관계를 이용하여 합의 최솟값을 구하는 과정이다. 다음 물음에 답하여라.

(문제) $a > 0, b > 0$ 이고 $ab = 4$ 일 때, $a + b$ 의 최솟값과 그 때의 a, b 의 값을 구하여라.
 (풀이) $a + b \geq 2\sqrt{ab} = 4$ 즉 $a + b \geq 4$ 이고
 등호는 $a = b$ 일 때 성립하므로
 $a + b$ 의 최솟값은 4이고 그 때의 a, b 의 값은 $a = b = 2$ 이다.

산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소의 문제를 풀 때에는 합이나 곱이 일정해야만 곱의 최댓값 또는 합의 최솟값을 구할 수 있다.

- (1) 위의 풀이는 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

- (2) $ab = 4$ 를 만족하는 몇 쌍의 a, b 의 값에 대하여 $a + b$ 의 값을 구하는 아래 표를 완성하여라.

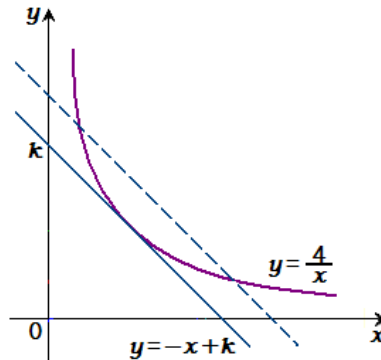
a	4	3	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	2
b	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	2
a + b					

$a + b$ 의 구체적인 값을 구해봄으로써 그 변화하는 경향을 파악하도록 한다.

- (3) 앞의 표에서 a 의 값이 4부터 점점 감소하여 2에 가까워질수록 b 의 값은 1부터 점점 증가하여 2에 가까워짐을 알 수 있었다. 이 때, $a + b$ 의 값은 어떻게 변화하고 있는가?

$a = b = 2$ 일 때 최소임을 구체적인 값의 계산으로 확인하게 한다.

- (4) $a > 0, b > 0$ 이고 $ab = 4$ 를 만족하는 (a, b) 를 좌표평면에 나타내면 아래 그림과 같은 쌍곡선의 일부가 되고, $a + b = k$ 라 하면 이 식을 만족하는 (a, b) 는 기울기가 -1이고 y절편이 k 인 직선이 된다. $a + b$ 의 최솟값의 의미를 직선과 쌍곡선의 위치 관계를 이용하여 설명하여 보아라.



식과 도형의 연관성을 이해하도록 한다.

- (5) $a > 0, b > 0$ 이고 $ab = 4$ 이면 $a + b = a + \frac{4}{a}$ 이다. 이 때, 함수 $f(a)$ 를 $f(a) = a + \frac{4}{a}$ 라 하자. 도함수를 이용하여 함수 $f(a)$ 의 증가감소를 확인하고 최솟값과 그 때의 a 값을 구하여라.

함수 $f(a)$ 는 위 (4)에서의 쌍곡선과 직선을 함수로 보았을 때 두 함수값의 합에 해당함을 이해하게 한다.

- (6) 이와 같은 문제가 산술기하 평균의 관계를 이용하여 풀리기 위해서는 어떤 조건이 필요한지 정리하여 보아라.

 오류 들여다보기 - 동시에 성립하는지?

2. 다음은 정훈이가 산술·기하 평균의 관계를 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구하는 풀이 과정이다. 물음에 답하여라.

(문제) $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

(풀이) $x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}}, y + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x}}$ 이므로

$$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{\frac{y}{x}} \cdot 2\sqrt{\frac{4y}{x}} = 4\sqrt{4} = 8 \text{ 이다.}$$

따라서 최솟값은 8이다.

- (1) 정훈이는 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

산술·기하 평균의 관계를 여러 번 사용하여 문제를 풀 때에는 등호가 성립할 조건이 동시에 만족될 수 있는지를 반드시 확인하도록 한다.

- (2) 최솟값이 8이라면 부등식 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) \geq 8 \cdots \textcircled{1}$ 에서 등호가 성립해야 한다. 위의 문제에서 등호가 성립하기 위해 필요한 조건을 모두 찾아보아라.

- (3) 위에서 찾은 조건이 동시에 성립할 수 있는지 확인하여 보아라.

- (4) 위의 풀이과정에서 나온 부등식 $\textcircled{1}$ 은 틀린 것인가, 맞는 것인가?

$x = 9$ 일 때 $x \neq 8$ 이라고 해도 된다.

- (5) 정훈이가 범한 오류는 어떤 것인가?

두 식의 곱으로 주어졌기 때문에 산술·기하 평균의 관계를 두 번 사용해야 할 것으로 생각하기 쉬우나, 식을 전개하여 정리하면 한 번만 사용해서 최솟값을 구할 수 있으므로, 식을 적극적으로 변형할 수 있도록 한다.

- (6) 정훈이와 같은 오류를 피하여 위의 문제를 바르게 풀 수 있는 방법을 찾아보아라.



산술·기하 평균의 관계와 최대 최소(4)

()년 ()월 ()일 ()학년 ()반 ()번 이름 ()

최대·최소 구할 때 어떤 접근 방법이 좋을까?

1. 학습목표

- 최대·최소를 구할 때 흔히 범할 수 있는 오류들이 있는지 문제 풀이를 분석한다.
- 최대·최소를 구할 때 이용할 수 있는 여러 방법들을 살펴보고 그 장·단점을 비교한다.

2. 과정

오류가 있는지 판단하기

다음 문제는 주어진 식의 최솟값을 구하는 문제이다.

(문제) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때, $y = \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}$ 의 최솟값을 구하여라.

지난 3차시 동안 확인했던 오류들 중 각 풀이에 해당하는 오류를 찾아낼 수 있도록 한다.

이 문제에 대한 서로 다른 접근법을 가진 7가지의 풀이가 주어진다. 잘못된 풀이는 오류를 찾아 진단하고 제대로 된 풀이는 장·단점을 비교하여 보자.

1. 다음은 (풀이1) 이다. 물음에 답하여라.

(풀이1) $\frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{\frac{12}{\sin^2 x} \cdot \frac{3}{\cos^2 x}}$ 에서

등호는 $\frac{12}{\sin^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x}$ 일 때 성립하므로

$$12 \cos^2 x = 3 \sin^2 x$$

$$12 \cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{5} \text{ 이고 따라서 } \sin^2 x = \frac{4}{5}$$

$$\text{그러면 } \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} = 12 \times \frac{5}{4} + 3 \times \frac{5}{1} = 30$$

이므로 최솟값은 30 이다.

(1) (풀이1)은 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

(2) $\cos^2 x = \frac{1}{3}$ 일 때 주어진 식의 값을 구하여 보아라. (풀이1)에서 구한 값을 최솟값이라고 할 수 있는가?

(좌변)과 (우변)이 같지 않을 때에도 (좌변)의 합이 최솟값을 가질 수 있음을 확인시킨다.
이는 (우변)의 곱이 일정하지 않은 상황에서 종종 일어날 수 있음을 다시 한번 확인하고 정리하게 한다.

(3) (풀이1)에서 범한 오류는 어떤 것인지, 유의점을 정리하여 보자.

2. 다음은 (풀이2) 이다. 물음에 답하여라.

$$\text{(풀이2)} \quad \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{\frac{12}{\sin^2 x} \cdot \frac{3}{\cos^2 x}} = \frac{12}{\sin x \cos x}$$

이므로

$$\text{여기에서 } y = \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \text{의 최소는}$$

$$\frac{12}{\sin x \cos x} \text{가 최소일 때}$$

즉 분모인 $\sin x \cos x$ 가 최대일 때 이다.

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } \sin x > 0, \cos x > 0 \text{ 이므로}$$

산술기하 평균의 관계에 의하여

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \geq 2\sqrt{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x \leq \frac{1}{2} \quad \text{즉} \quad \frac{12}{\sin x \cos x} \geq 24$$

따라서 y 의 최솟값은 24이다.

최솟값을 구하는 과정에서 등호가 몇 번 성립하여야 하는지를 주의 깊게 살펴 보게 한다.

(1) (풀이2)는 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

- (2) 최솟값이 24가 되려면 두 개의 부등식에서 등호가 성립하여야 한다.
이 두 개의 부등식을 찾고, 두 개의 등호가 동시에 성립할 수 있는지
확인하여라. 24가 최솟값이라고 말할 수 있는가?

최대·최소를 구하는 과정에서 산술·기하 평균의 관계를 두 번 이상 사용하게 되면 등호가 동시에 성립하도록 해야 한다.

- (3) (풀이2)에서 범한 오류는 어떤 것인지, 유의점을 정리하여 보자.

3. 다음은 (풀이3) 이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} \text{(풀이3)} \quad y &= \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} = 12 \operatorname{cosec}^2 x + 3 \sec^2 x \\ &= 12(1 + \cot^2 x) + 3(1 + \tan^2 x) \\ &= 15 + 12 \cot^2 x + 3 \tan^2 x \end{aligned}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ 일 때 } \tan^2 x > 0, \cot^2 x > 0 \text{ 이므로}$$

산술·기하 평균의 관계에 의하여

$$12 \cot^2 x + 3 \tan^2 x \geq 2\sqrt{12 \cot^2 x \times 3 \tan^2 x} = 12 \text{ 이므로}$$

y 의 최솟값은 $15 + 12 = 27$ 이다.

산술·기하 평균의 관계를 두 번 이상 사용하게 되면 등호가 동시에 성립하지 않음으로 인하여 오류가 발생할 수 있다. 따라서 가능한 식 변형 등을 통하여 산술·기하 평균의 관계를 한 번만 사용하는 것이 오류를 줄일 수 있음을 이해하게 한다.

- (1) (풀이3)은 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

- (2) (풀이3)에서는 산술·기하 평균의 관계를 몇 번 사용하였는가?

- (3) 최솟값이 27이 되려면 부등식 $12 \cot^2 x + 3 \tan^2 x \geq 12$ 에서 등호가 성립하여야 한다. 등호가 성립할 조건을 찾아서 가능한지 확인하여라. 최솟값이 27이라고 할 수 있는가?

4. 다음은 (풀이4) 이다. 물음에 답하여라.

(풀이4) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 임을 이용하여

$$\begin{aligned} y &= \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \\ &= \left(\frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 15 + 12 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &\geq 15 + 2 \sqrt{12 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = 15 + 12 = 27 \end{aligned}$$

따라서 y 의 최솟값은 27이다.

간단한 식 변형을 통하여
산술기하 평균의 관계를
한 번만 사용함으로써 오
류를 줄일 수 있게 한다.

(1) (풀이4)은 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

(2) (풀이4)에서는 산술기하 평균의 관계를 몇 번 사용하였는가?

(3) 최솟값이 27이 되기 위하여 (등호가) 성립할 조건을 찾아서 확인해
보아라. 최솟값이 27이라고 할 수 있는가?

5. 다음은 (풀이5) 이다. 물음에 답하여라.

(풀이5) $\sin^2 x = t$ 라 놓으면, $\cos^2 x = 1 - t$ ($0 < t < 1$) 이고,

$$y = \frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} = \frac{12}{t} + \frac{3}{1-t} \quad (*)$$

양변에 $t(1-t)$ 를 곱해서 정리하면

t 에 대한 이차방정식 $yt^2 - (9+y)t + 12 = 0$ 를 얻는다.

이 때 $y > 0$ 이고, $f(t) = yt^2 - (9+y)t + 12$ 라 하면

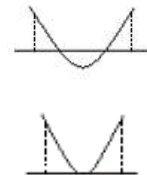
$f(0) = 12$, $f(1) = 3$ 이므로

$f(t) = 0$ 의 해가 $0 < t < 1$ 에서 하나 이상 존재하려면

$D \geq 0 \cdots \textcircled{1} \quad 0 < \frac{9+y}{2y} < 1 \cdots \textcircled{2}$ 이어야 한다.

(생략)

이차함수가 주어진 구간의
양 끝에서 함수값이 양수
이고, 그 구간에서 1개 이
상의 해를 가지려면
판별식은 0보다 크거나 같
아야 하고, 대칭축이 구간
안에 포함되어야 한다.



(1) (풀이5)는 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

(2) 생략된 부분의 두 부등식을 풀어서 y 의 최솟값을 구하여라.

$$D \geq 0 \cdots \textcircled{7}$$

$$0 < \frac{9+y}{2y} < 1 \cdots \textcircled{8}$$

(3) (풀이5)를 (풀이4)와 비교하여 장·단점을 말하여라.

문제를 풀어서 올바른 결과를 얻는다 하더라도 풀이 과정에서 사용한 지식 및 절차의 복잡성에 따라서 학생들의 오류의 가능성이 상당히 달라질 수 있으므로 절차가 복잡하지 않은 방법을 선별하여 사용할 수 있는 능력을 기르게 한다.

6. 다음은 (풀이6) 이다. 물음에 답하여라.

(풀이6) 위의 (풀이5)에서 $y = \frac{12}{t} + \frac{3}{1-t}$ (*) 를 미분하여 그래프의

개형을 살펴보면

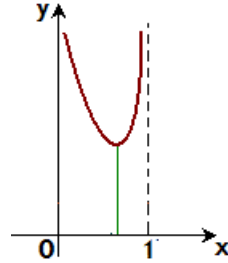
$$y' = -\frac{12}{t^2} + \frac{3}{(1-t)^2} \text{ 이므로}$$

$$t = \frac{2}{3}, 2 \text{ 일 때 } y' = 0 \text{ 이고}$$

$0 < t < 1$ 에서 아래로 볼록 $\cdots \textcircled{9}$ 이다.

따라서 그래프는 오른쪽과 같고

$$\text{최솟값은 } t = \frac{2}{3} \text{ 일 때 } y = 12 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{1} = 27 \text{ 이다.}$$



함수 $y = f(x)$ 에 대하여
이계도함수 y'' 의 부호를
이용하여 그래프의 모양을
판정할 수 있다.
 $y'' > 0 \Rightarrow$ 아래로 볼록
 $y'' < 0 \Rightarrow$ 위로 볼록

(1) (풀이6)은 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

(2) $\textcircled{9}$ 을 어떻게 판정할 수 있는지 구체적으로 설명하여라.

(3) (폴이6)을 (폴이4)와 비교하여 장·단점을 말하여라.

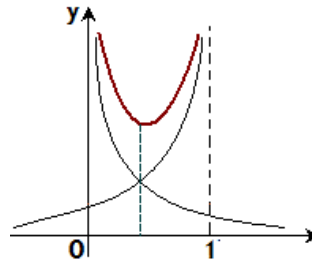
7. 다음은 (폴이7) 이다. 물음에 답하여라.

(폴이7) 앞의 (폴이5)에서 $y = \frac{12}{t} + \frac{3}{1-t}$ (*) 의 최솟값을 두 그래프

$y = \frac{12}{t}$ 와 $y = \frac{3}{1-t}$ 를 이용하여
 찾아보면 두 그래프의 교점에서 최소
 가 됨을 알 수 있다.

$$\frac{12}{t} = \frac{3}{1-t} \quad \text{즉,} \quad t = \frac{4}{5} \quad \text{일 때}$$

$$\text{최솟값은 } y = 12 \cdot \frac{5}{4} + 3 \cdot \frac{5}{1} = 30 \text{이다.}$$



두 그래프의 교점에서 최
 소가 될 거라는 생각은 증
 명되지 않은 것이므로 반
 드시 확인과정을 거치도록
 해야 한다.

(1) (폴이7)은 어떤 조건들을 이용하여 문제를 푼 것인가?

(2) (폴이6)을 참고하였을 때, 두 그래프 $y = \frac{12}{t}$ 와 $y = \frac{3}{1-t}$ 의 교
 점에서 $y = \frac{12}{t} + \frac{3}{1-t}$ 가 최소라고 할 수 있는가?

(3) 그래프를 이용한 문제풀이에서 저지를 수 있는 오류와 그 유의점을
 정리하여 보자.

(4) (폴이7)은 (폴이1)과 같은 오류를 범하고 있다. 그 둘을 연관지어 설
 명하여 보아라.

교점을 찾는 방정식

$$\frac{12}{t} = \frac{3}{1-t} \text{ 과}$$

등호가 성립하는 방정식

$$\frac{12}{\sin^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} \text{ 은}$$

동일한 식이므로 둘은 같
 은 오류를 범하고 있음을
 알게 한다.



산술·기하 평균의 관계와 최대 최소

1 활동 내용 분석

이 활동은 학생들의 원리발견학습능력을 신장시키기 위하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구하는 문제 해결과정에서 발생한 대표적인 오류들을 여러 가지 접근방법들을 통하여 분석하고 교정함으로써 산술평균과 기하평균의 관계에 대한 보다 정확한 이해에 도달하는 과정에 중점을 두고 구성되었다.

활동의 성격

적절한 안내에 따라 학습자가 능동적으로 탐구, 분석해야 한다.

2 진행 방법

제시되어진 문제풀이를 보고 다음과 같은 과정을 밟아 나간다.

- ① 주어진 문제 풀이가 어떤 조건을 사용하였는지 파악한다.
- ② 사용한 조건이 문제의 상황에 적합한지 판단한다.
- ③ 적절히 안내되어진 물음에 따라 여러 가지 측면에서 문제 풀이를 분석한다.
- ④ 문제풀이의 오류를 진단한다. 필요하면 안내를 따라 연역적인 증명 과정을 거치도록 한다.
- ⑤ 각 풀이의 오류의 내용 및 원인을 정리하여 관련된 개념의 이해를 명확히 한다.
- ⑥ 여러 가지 풀이방법의 장·단점을 비교하여 주어진 조건별로 가장 적합한 풀이 방법을 선택할 수 있도록 한다.

지도상 유의점

산술·기하 평균의 관계를 이용하여 최대·최소를 구할 때 생길 수 있는 오류는 매우 다양하고 광범위하므로 체계적으로 분류하여 접근하는 것이 필요하다.

3 학생용 활동지 정답 및 해설

자료(1)

알고 있나요?

1. 산술평균과 기하평균의 관계

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$(\text{증명}) \quad \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \} \quad (**)$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0 \quad \therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

여기에서 $a > 0$, $b > 0$ 일 때만 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (**) 이다.



참고

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

오류 들여다보기 - x의 조건을 잘 따져 보았나요?

2. 이 풀이는 $x \geq 0$ 일 때, $x + 2 > 0$, $\frac{1}{x+2} > 0$ 이 됨을 보고 산술

기하 평균의 관계를 이용해도 된다고 생각하였다. 그러나 x 에 구체적인 수를 대입하여 보면 식의 값은 2보다 큰 값들만 나온다. 이는 등호가 성립할 때의 x 의 값이 $x = -1$ 로서 문제의 조건 $x \geq 0$ 과 맞지 않기 때문이다.

(옳은 풀이) $y = x + 2 + \frac{1}{x+2}$ 라 하고 y 를 미분하면 $x \geq 0$ 에서

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \text{ 이므로 증가함수이다.}$$

따라서 최솟값은 $x = 0$ 일 때 $\frac{5}{2}$ 이다.



참고

$$y = x + 2 + \frac{1}{x+2} \text{ 는}$$

1) $x = -2$ 를 제외한 모든 곳에서 연속이고,

2) $x \geq 0$ 에서 $y' > 0$ 이므로 y 가 증가한다.

따라서 $x = 0$ 일 때 y 가 최소가 된다.

자료(2)

오류 들여다보기 - 과연 맞는 말인가요?

1. 정훈이의 결론이 맞는 것은 합 또는 곱이 일정하다는 조건이 있을 때 뿐이다. 곱이 일정하면 등호가 성립할 때 합의 최솟값이 되고, 합의 일정하면 등호가 성립할 때 곱의 최댓값이 된다.

오류 들여다보기 - 등호가 만능인가?

2. 은영이는 a 와 b 사이의 관계식을 조건에 추가하였다. 그러나 곱이나 합의 일정하지 않으면 아무리 관계식이 있어도 등호가 성립할 때 합의 최솟값이나 곱의 최댓값이 나오지는 않는다.

실제로 $a = 0$ 일 때 $b = 1$ (즉 $a \leq b$)이 두 변수의 최솟값이므로 $a + b$ 의 최솟값은 1이고, a 와 b 는 무한대까지 커질 수 있으므로 $2\sqrt{ab}$ 의 최댓값은 존재하지 않는다. 이것은 식의 변형을 이용하여

$$a + b = \frac{3}{2}a + 1 \geq 1 \text{ 과 } 2\sqrt{ab} = \sqrt{2(a^2 + 2a)} \geq 0 \text{ 으로 확인}$$

할 수 있다.

자료(3)

이렇게 하면 되나요?

1. 곱이 일정할 때 합의 최솟값을 산술기하 평균의 관계를 이용하여 구한 풀이이다. 실제로 값을 계산하여 확인해도 결과는 마찬가지이다. 이 때 구한 $a + b$ 의 최솟값은 (쌍곡선 $ab = 4$ 와 직선 $a + b = k$ 의 공통부분이 있을 때의 k 의 최솟값이므로) 두 도형이 접하는 순간 직선의 y 절편과 같다.

한편 $f(a) = a + \frac{4}{a}$ 를 미분하면 $f'(a) = 1 - \frac{4}{a^2}$ 에서

$0 < a < 2$ 일 때 감소이고, $a > 2$ 일 때 증가이므로 $a = 2$ 일 때 최솟임을 알 수 있다.

오류 들여다보기 - 동시에 성립하는지?

2. 이 풀이는 최솟값을 구하기 위하여 산술기하 평균의 관계를 두 번 사용했다. 그런데 문제는 최솟값이 성립하기 위한 두 등호가 동시에 성립하지 않는다는 것이다.

$$x + \frac{1}{y} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} \text{를 만족하는 것은 } x = \frac{1}{y} \text{이고}$$

$$y + \frac{4}{x} = 2\sqrt{\frac{4y}{x}} \text{를 만족하는 것은 } y = \frac{4}{x} \text{이기 때문이다.}$$

이런 오류를 피하기 위해서는 식 변형을 통하여 산술기하 평균의 관계를 가능하면 한 번만 사용하도록 해야 한다.

$$(\text{옳은 풀이}) \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) = xy + 4 + 1 + \frac{4}{xy}$$

$$\geq 5 + 2\sqrt{xy \cdot \frac{4}{xy}} = 9$$

그렇다고 해서 풀이 중간의 부등식 $\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right) \geq 8$ 이 틀린

것은 아니다. $x = 9$ 일 때 $x \geq 8$ 이라고 할 수는 있다.

자료(4)

오류가 있는지 판단하기

1. $\frac{12}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{\frac{12}{\sin^2 x} \cdot \frac{3}{\cos^2 x}}$ 에서 우변의 곱이 일정하지 않기 때문에 등호가 성립할 때 최솟값을 갖는다고 말할 수 없다. 실제로 $\cos^2 x = \frac{1}{3}$, $\sin^2 x = \frac{2}{3}$ 일 때 최솟값 27을 갖는다.

참고

식 $ab = 4$ 를 만족하는 (a, b) 에 대하여 $a + b = k$ 의 값을 구한다는 것은 연립방정식

$$\begin{cases} ab = 4 \\ a + b = k \end{cases} \text{의 해가}$$

존재할 때의 k 값을 구하는 것과 같다.

연립방정식의 해가 존재한다는 것은 두 방정식이 나타내는 도형이 공통으로 만족하는 (x, y) 즉, 교점이 존재한다는 것이다.

쌍곡선과 직선의 교점이 생기도록 하면서 k 가 최소가 되려면 접하는 순간이어야 한다.

참고

부등식 $x \geq 3$ 을 만족하는 x 라고 해서 x 가 반드시 3의 값을 가질 필요는 없다.

2. 산술기하 평균의 관계를 2번 사용하면서 두 개의 등호가 동시에 성립하는지 여부를 확인하지도 않고 암묵적으로 사용한 오류이다.

첫 번째 등호가 성립할 때는 $\cos^2 x = \frac{1}{5}$, $\sin^2 x = \frac{4}{5}$ 가 되고

두 번째 등호가 성립할 때는 $\cos^2 x = \frac{1}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}$ 이므로

두 등호가 동시에 성립할 수 없다. 즉 최솟값은 24라고 할 수 없다.

3. 식 변형을 이용하여 산술기하 평균의 관계를 1번만 사용하여 답을 정확히 구한 깔끔하고도 간단한 풀이이다.

$12 \cot^2 x + 3 \tan^2 x \geq 12$ 에서 등호가 성립하려면

$$12 \cot^2 x = 3 \tan^2 x \Rightarrow 4 = \tan^4 x \therefore \tan^2 x = 2$$

최솟값은 $15 + 12 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 2 = 27$ 이 맞다.

4. (풀이3)보다 더 간단한 식 변형을 이용한 풀이이다. 등호가 성립하기 위한 조건은 위의 3.과 같다.

5. 이차방정식의 판별식과 근의 분리를 이용한 풀이이다. 단, 계산이 많고 복잡하여 이해하기 쉽지 않고 계산과정에서 기술적인 오류가 발생할 가능성이 크다. ㉠에서 $y > 9$

$$\textcircled{1} \text{에서 } (9+y)^2 - 48y = y^2 - 30y + 81 \geq 0, (y-15)^2 \geq 12^2$$

$$\therefore y \geq 27$$

6. 치환한 식을 미분하여 증가감소를 확인한 후 최솟값을 구하는 풀이이다. 그래프가 아래로 볼록인 것은 $y'' = \frac{24}{t^3} + \frac{6}{(1-t)^3} > 0$ 에서 판정할 수 있다. y 값이 변화하는 전체적인 모습을 알 수 있다.

7. y 를 두 함수의 합으로 변형하되, 그 합을 두 그래프를 보고 짐작함으로써 최소가 아닌 곳을 최소라고 어림하는 오류를 범한 풀이이다.

그림을 보아서는 두 그래프가 만나는 곳 $\frac{12}{t} = \frac{3}{1-t}$, 즉 $t = \frac{4}{5}$

일 때 최솟값을 가질 것처럼 보이지만, (풀이6)처럼 직접 미분하여 구해보면 최솟값은 $t = \frac{2}{3}$ 일 때 갖는다.

참고

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cot^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

참고

$$0 < t < 1 \text{ 이므로}$$

$$(1-t)^3 > 0, t^3 > 0$$

참고

$$\frac{12}{t} = \frac{3}{1-t} \text{ 는}$$

(풀이1)에서의

$$\frac{12}{\sin^2 x} = \frac{3}{\cos^2 x} \text{ 와}$$

같은 식이다.

두 풀이 모두 곱이 일정하지 않는데도 무조건 등호가 성립하는 순간이 최소일거라고 생각하는 오류를 범하였다.



참 고 자 료

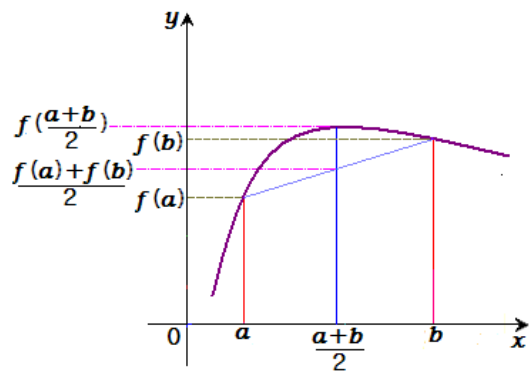
산술·기하 평균의 대소 관계에 대한 또 다른 증명 2가지

1. Jensen 의 부등식을 이용한 증명

위로 볼록인 함수 $f(x)$ 의 그래프에서 다음의 부등식(Jensen 의 부등식)이 반드시 성립한다.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

여기에서 위로 볼록인 함수를
 $f(x) = \log x$ 라 하면



$$\log\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log ab = \log \sqrt{ab}$$

$f(x) = \log x$ 가 증가함수 이므로 $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$ 가 성립한다.

2. 미분을 이용한 증명

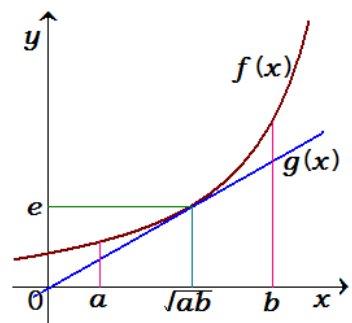
기하평균 $\sqrt{ab}$ 에 대하여 지수함수 $y = f(x) = e^{\frac{x}{\sqrt{ab}}}$ 의 그래프를 생각하자.
원점에서 이 그래프에 그은 접선의 방정식 $g(x)$ 을 구하면

접점을 $(t, e^{\frac{t}{\sqrt{ab}}})$ 라 하면 $y' = \frac{1}{\sqrt{ab}} e^{\frac{x}{\sqrt{ab}}}$ 에서 접선의

기울기는 $\frac{1}{\sqrt{ab}} e^{\frac{t}{\sqrt{ab}}}$ 이므로

접선은 $y - e^{\frac{t}{\sqrt{ab}}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} e^{\frac{t}{\sqrt{ab}}} (x - t)$ 이고,

원점을 지나므로 $(0, 0)$ 을 대입하면



$t = \sqrt{ab}$ 즉 접선은 $y = g(x) = \frac{e}{\sqrt{ab}}x$ 이다.

그래프에서

양수 a, b 에 대하여 $f(a) \geq g(a) > 0$ 이고 $f(b) \geq g(b) > 0$ 이므로

$$e^{\frac{a}{\sqrt{ab}}} e^{-\frac{e}{\sqrt{ab}}} a \quad \text{와} \quad e^{\frac{b}{\sqrt{ab}}} e^{-\frac{e}{\sqrt{ab}}} b \quad \text{를 변끼리 곱하면}$$

$$e^{\frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{\sqrt{ab}}} e^{-\frac{e}{\sqrt{ab}}} a e^{-\frac{e}{\sqrt{ab}}} b \quad \geq \quad e^{\frac{a+b}{\sqrt{ab}}} e^{-2} \quad \text{이고}$$

지수끼리 비교하여 $\therefore \frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$

※ 위의 두 증명은 산술평균과 기하평균에 대한 일반화된 다음 부등식을 증명할 때에 유용하다.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$



참 고 문 헌

- 김선주 (2005). 고등학교 극한영역에서의 오류분석을 통한 교정학습지도방안. 이화여자대학교. 석사학위 논문.
- 노은정 (2002). 수학학습에서 오류의 활용 효과-정의 지도를 중심으로. 이화여자대학교. 석사학위 논문.
- 박창희 (2006). 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한 문제 해결 과정의 오류 및 오개념. 성균관대학교. 석사학위 논문.
- 조진석 (2002). 오류찾기-산술평균·기하평균(1),(2). 수학사랑, 제33권 p.130~132, 제35권 p.146~150. 수학사랑.