

탐구수업 지도자료

- 학 년 고등학교 1학년
- 단 원 2단원 수학적 모델링을 통한 삼각법의 이해
- 소 단 원 1부 단원의 개관
- 제 목 도입
- 대표 저자 조한혁(서울대학교)
- 공동 저자 우정호(서울대학교)
이정아(돌마고등학교)
김민정(구일고등학교)
허은숙(성신여자고등학교)
박효정(명일여자고등학교)

이 자료는 서울대학교 과학교육연구소가 교육인적자원부의 과학교육연구기관으로 지정받아 수행하고 있는 「탐구·실험 중심의 과학교육 활성화를 위한 연구개발 사업」의 일환으로 개발되었습니다.



서울대학교 과학교육연구소

Seoul National University Science Education Research Center



제 1 부

단원의 개관_ 수학적 모델링과 삼각법



제 1 장 수학적 모델링



서울대학교
과학교육연구소

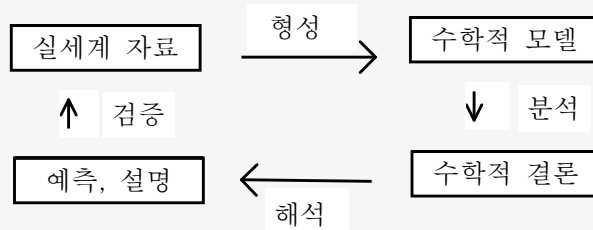
수학적 모델링이란?

수학적 모델링이란 자연적, 물리적, 실세계 현상 등 현실 세계와 관련된 여러 가지 현상을 수학적 모델을 형성하여 해결하는 전 과정이다. 수학적 모델은 어떤 현상의 특성들에 근접하는 수학적 구조(그래프, 수식, 기하학적 도형, 시뮬레이션 도구 등이 예)를 의미하며 그것을 고안하는 과정이 수학적 모델링이다. 이것은 일종의 문제해결과정이지만 정답이 정해져 있는 문제에 대해 그 해답을 찾아가는 것이 아니라 비수학적인 상황(문맥, context)으로 보이는 현상(phenomenon)이 구조화되는 단계가 포함되어 있음을 그 특징으로 한다. 수학적 모델링은 모든 사건들이 문제로 해석될 수 있으며 중요한 요인들을 인식하고 그 관계를 판별하여 수학적으로 해석한 후 관계들의 수학적 해석을 통해 결론지어야 할 현상들을 분석하는 과정으로 해석, 분석 그리고 종합과 같은 보다 고차원적인 인지 활동을 다루는 체계적인 과정이라 할 수 있다.

수학적 모델링의 과정

수학적 모델링의 과정은 다음의 네 단계로 이루어지며 이는 문제해결단계에 대응되는 것이다.

- (1) 주어진 실세계 상황을 모델로 나타내는 모델 형성 단계
- (2) 모델을 분석하고 결론에 이르는 단계
- (3) 모델과 결과를 해석하고 예측하고 설명하는 단계
- (4) 결론이 주어진 실세계 상황에 맞는지 여부를 검증해보는 단계



이러한 과정을 통해 모델이 적합하지 않다고 판단되면 다시 위의 첫 번째 단계를 반복할 수 있다. 또 위의 첫 번째 **모델 형성단계**는 다음과 같은 하위의 과정으로 나누어진다.

① 문제 확인 단계

: 문제 상황에 주어진 변수가 무엇인지를 파악하고 문제 상황에 포함되어 있는 데이터를 분류하고 우리가 연구하고자 하는 특수한 문제를 확인하는 단계이다. 중요한 점은 상황



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소

을 수학적 모델로 바꾸기 위해서는 문제 확인의 과정을 엄밀히 해야 한다는 것이다.

② 가설 설정의 단계

: 주어진 상황에 맞는 수학적 모델을 단번에 찾을 수는 없다. 주어진 조건의 일부를 축소할 필요가 있을 수 있다. 변수의 성격을 파악하여 변수를 독립변수와 종속변수로 분류하는 과정이 여기에 속한다. 이들 변수 사이의 관계를 결정하여야 한다.

③ 모델 해석 단계

: 주어진 모델이 문제 상황을 만족하는 것인지를 해석하는 과정이다. 모델이 주어진 조건을 만족하는지를 알아보고 만약 맞지 않으면 위의 두 번째 단계로 돌아가서 다시 변수 사이의 관계를 점검하는 과정이다.

④ 모델 검증 단계

: 일단 적합한 모델이라고 판단되면 이 모델을 사용하기 전에 검증해보는 단계가 필요하다. 구체적인 데이터를 이용하거나 데이터에 나와 있지 않은 자료를 이용하여 모델의 적합성을 점검한다.

⑤ 모델 실행 여부의 판단 단계

: 만들어진 모델이 사용자가 편리하게 사용할 수 있는지 여부를 판단한다.

⑥ 모델 수정 단계

: 위의 검증단계와 실행 여부를 판단한 다음, 모델을 수정하여 수정된 모델이 문제 조건에 맞는지를 최종 확인하는 단계이다.

모델의 형성을 포함하는 문제해결과정으로써 모델링 과정은 이상의 과정과 반드시 일치되는 기계적인 작업이 아니며 점진적으로 세련되어 가는 것으로 학생들이 학습해야 할 것은 수학적 모델이나 결과가 아니라 모델링 과정이다.

수학적 모델링 교육의 목적

수학적 모델링에 대해 그 교육의 목적을 Niss(1989)(조완영 2003 재인용)는 다음 다섯 가지로 제시하고 있으며 이는 수학적 모델링 교육의 필요성을 시사한다.

- (a) 새로운 수학적 개념, 방법을 이해한다.
- (b) 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실체를 이해한다.
- (c) 창의적 사고와 문제해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- (d) 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하려는 태도를 기른다.
- (e) 수학이 이미 완성된 산물이 아니라 인간 활동의 결과로 만들어진 것임을 이해한다.

수학적 모델링 학습-지도에서의 학생의 역할

수학적 모델링 활동은 학생들이 자신을 둘러싼 제 현상을 탐구하면서 능동적이고 적극적인 자세로 수학의 폭넓은 적용가능성을 학습하는 과정이라 할 수 있다. 따라서 학생의 역할은 기존의 단편적인 지식의 습득이나 알고리즘적인 연습위주 수업에서의 수동적인 학습자의 역할에서 보다 적극적인 탐구자로서 그 역할이 변해야 한다. 즉, 문제를 해결하기 위해 필요한 정보와 학습 경험을 찾고, 요구되는 것이 무엇인지를 결정하는 적극적인 자세를 가져야 하며, 항상 배우는 입장이 아닌 때로는 다른 학생의 문제해결에 대한 조력자로서의 학습 공동체를 이루어야 하고,



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소

문제에 대한 독창적이고 창조적인 풀이를 할 수 있도록 탐색하고 발견할 수 있도록 해야 할 것이다.

수학적 모델링 학습-지도에서의 교사의 역할

수학적 모델링 학습-지도에서 교사는 문제 상황을 제시해 주는 것부터 모델링 과정에서의 조언과 정보의 제공, 원활한 의사소통과 상호 학습을 위한 중재자 역할 등 학생들의 뒤편에서 학생들을 이끌어 갈 수 있는 능력을 발휘할 필요가 있으므로 더욱더 그의 역할 비중이 커질 수밖에 없다. 수학적 모델링 학습-지도 과정에서 교사의 역할을 좀 더 구체적으로 살펴보면 첫째, 학습자로 하여금 현실 상황에서의 문제를 활용하여 고등 수준의 학습이 가능하도록 하여 독립적으로 사고하도록 한다. 둘째, 학습자의 동기 유발을 위해 다양한 학습 상황을 제공하고 예견되기 어려운 학습 상황을 다룬다. 셋째, 긍정적인 상호작용을 유발시키고, 학습자가 자발적으로 학습에 참여하여 자기 주도적 학습이 이루어지도록 한다.



수학적 모델링은 문제 해결의 한 형태로 과학교과나 수학교과와 연습문제나 활용문제를 푸는 데 있어 지식을 단순히 사용하는 것이 아닌 문제를 해결하기 위해 다양한 수학적 기술을 탐구하는 과정이라 할 수 있으며 이로부터 학생들은 수학의 폭넓은 적용 가능성을 보게 될 뿐만 아니라 지식에 대한 개념적이고 종합적인 학습경험을 할 수 있을 것이다.

수학적 모델링 학습-지도에서의 어려움

수학적 모델링 학습지도에서 학생들은 교과서 연습문제나 수행평가 문제보다 조작하기가 어렵다는 점을 종종 호소한다. 기존의 문제해결학습은 문장제 문제나 실생활 소재를 포함하는 수행평가문제에 해당하는 비교적 단순한 풀이과정과 간단한 수치의 답을 다루는 것이었다. 이에 반해 수학적 모델링 학습지도에서의 문제 상황은 자연적, 물리적, 실세계 현상 등 현실 세계와 보다 밀접하게 관련되어 있기 때문에 학생들이 문제를 이해하고 해를 구해 나가는 과정이 간단하지 않다는 것이다. 또한 교사들은 교과서 별로 과학적 소재를 다루는 데 있어서 어떤 체계나 일관성이 부족하고 단편적인 구성에 그치고 있어 지도상의 어려움을 얘기한다. 그러나 수학적 모델링 학습지도가 수학과 과학의 통합적이고 종합적인 이해에 도움이 될 것이라고 본다면 이를 위해 필요한 것은 교사의 안내와 이를 뒷받침할 수 있는 자료이다. 따라서 개발되는 자료는 이 점을 주안점으로 하여 학습지도과정을 구성하고자 하였다.



제 2 장 : 고등학교 10단계 수학 교과와 과학 교과의 연계성

고등학교 10단계 수학 교과와 과학교과의 연계성을 드러내어 수학적 모델링의 학습지도 자료로 구현하기 위해 과학 교과서의 단원별 내용 및 관련 수학개념을 정리한 후 현재 학습 지도에 있어서의 문제점을 분석한 후 양 교과를 통합하는 수학적 개념으로서의 삼각법을 단원으로 선정하여 탐구 주제와 그 세부 활동을 조직한다.



(1) 10단계 과학 교과서의 단원별 내용 및 관련 수학 개념

고등학교 10단계 수학교과와 과학교과의 통합적 학습지도 방법인 수학적 모델링 과정의 구현을 위해 과학 교과서의 단원별 내용 및 관련 수학개념을 분석하였으며 본 교재에서 통합하고자 하는 수학적 개념을 정리하였다.

과학 단원	제목	내용	포함된 수학개념	확장 개념 (본 교재의 초점)
I. 과학의 탐구	1. 과학의 탐구			
II. 에너지	1. 힘과 에너지	1. 관성의 법칙 2. 등가속도 법칙 3. 작용, 반작용법칙 4. 힘의 평형 5. 충돌과 운동량 보존	· 일차함수 · 이차함수 · 변화량, 적분 개념을 암묵적으로 활용 · 벡터 분해 활용	· 물체의 운동 속도를 삼각비를 활용해 표현함 (속도를 평면상의 수직, 수평방향으로 분해하는 개념의 이해가 필요) · 운동량 보존을 통한 지진해일의 해석(읽을거리)
	2. 전기 에너지	1. 옴의 법칙 2. 전류와 전력 3. 발전과 송전 4. 전류에 의한 자기장 5. 전자기유도	· 비례식(유리식) · 정비례, 반비례	
	3. 파동 에너지	1. 파동의 발생과 종류 2. 파동의 전파 : 반사, 굴절 3. 파동의 중첩과 파동에너지	· 파장, 진동수, 주기의 관계 · 입사각, 굴절각 · 정비례, 반비례 · 주기함수	· 파동의 발생과 전파를 삼각함수의 그래프로 표현하기 · 원운동에서 비롯된 삼각함수의 주기성 이해
	4. 에너지 전환	에너지 전환, 효율, 보존		
III. 물질	1. 전해질과 이온	1. 전해질 2. 양, 음이온 3. 전기 분해	· 함수정의 및 그래프 해석	
	2. 산과 염기의 반응	1. 산과 염기 2. 중화반응 3. 염	· 함수정의 및 그래프 해석	
	3. 반응속도	1. 반응속도 2. 농도, 면적, 온도, 촉매	· 함수정의 및 그래프 해석	
IV. 생명	1. 물질대사	1. 물질대사와 효소 2. 광합성 3. 호흡		
	2. 자극과 반응		· 변화율 개념	



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소

	3. 생식		· 주기	
V. 지구	1. 지구의 변동	1. 지각변동 2. 판 구조론	· 좌표 표현	· 지구와 태양, 달과의 공전, 자전 관계에서 비롯된 계절의 변화와 주기적 특징을 삼각함수로 표현하기
	2. 대기와 해양	1. 일기의 변화 2. 기후(계절별) 3. 해수(강수량)	· 평균	
	3. 태양계와 은하	1. 행성의 분류 2. 태양(흑점이동) 3. 별	· 원과 현, 접선 · 집합(행성의 분류)	
VI. 환경	1. 생물 농축과 산성비 2. 온실 효과와 소음		· 함수정의 및 그래프 해석	



서울대학교
과학교육연구소

a. 과학-수학 교과 간 연계성 측면에서의 문제점

과학-수학 교과 간 연계성 측면에서의 문제점을 살펴보면 우선, 10단계 수학 수준이상의 수학적 개념을 미리 제시하여 과학과 수학 교과간의 내용 제시 순서 측면에서 모순이 있다. 예를 들어, 과학 교과서의 내용 중 포물선 운동을 하는 물체를 설명하는 과정에서 변화량(속도의 변화량이 가속도이다.)과 적분(물체의 변위는 속도 그래프 아래의 면적이다.)의 개념을 암묵적으로 활용하고 있다. 물론 상식적이고 직관적인 측면이 포함되어 있으나 엄밀히 보면, 이 관계는 고등학교 2학년 자연과정의 미분과 적분 개념과 연결되어야 한다. 따라서 과학-수학적 개념의 학년별 순차적 제시 측면에서는 모순이 있음을 알 수 있다.

다음으로는 과학 교과에서는 현상의 관찰로부터 수학적 모델로의 형성과정이 생략된 개념의 일반화와 수학적 모델의 일방적인 제시를 포함한 문제풀이과정이 있음을 볼 수 있다. 예를 들어, 과학 교과에서 파동에너지를 다루면서 다양한 그래프와 주기에 대한 수학적 개념을 사용하고 있다. 그러나 이는 물체의 충돌에서 비롯되는 파동의 전파와 관련된 개념에 한정되어 있다. 실제 수학에서 주기의 중요성은 실생활에서 관찰할 수 있는 원운동, 또는 지구의 공전과 자전에서 비롯된 천체 현상을 바탕으로 설명할 때에도 많은 의미가 있다(이 때 지구의 공전 궤도를 원으로 가정하자). 그러나 다양한 주기적인 현상을 표현할 수 있는 “지구” 단원에서는 현재 ‘평균 구하기, 행성을 집합으로 분류하기, 원과 접선 문제 해결하기’ 등의 개별적인 수학적 개념만을 다루는 데 그치고 있다.

그리고 과학교과에서 모델을 사용한 설명식 학습지도는 이루어져왔으나 모델을 구성하고 활용하는 활동 위주의 학습지도는 아직 구체적으로 구현되고 있지 않다. 자연 현상을 관찰하고 실험하여 자료를 수집하는 학생활동 부분은 비교적 잘 구성되어 있지만 이들 자료들을 조직하여 수학적 모델을 구성하여 설명·예측하는 활동과정은 잘 들어나지 않고 이것에 대해 단순히 설명하는 방식을 취하고 있는 편이다. 과학교과에서의 학습위계를 살펴보면 자연에 대한 관찰과 경험에서부터 과학의 법칙의 이해의 순으로 조직되어 있다. 그런데 그 학습과정을 살펴보면 학생들이 자료를 수집한 후 그 자료들을 조직하여 수학적 모델을 구성하는 과정은 생략되거나 설명으로 대신하는 경우가 많아 학생들은 과학을 하는 경험이 부족한 것에서 비롯되는 과학학습의 어려움을 갖고 있다.

한편 수학교과에서는 단순한 계산위주의 연습문제를 다룸으로써 학습자의 구체적이고 현실적인 문제 상황 속에서 수학적 개념을 적용할 기회를 제공하는 것이 드물다. 이에 학생들



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소

은 기본적인 계산능력을 제외하고는 수학의 많은 내용들이 자신과 무관하다고 생각하기 쉬워 긍정적인 학습동기 부여에 어려움이 있다. 이러한 양 교과에서의 학습의 어려움은 불가분의 관계에 있는 교과들을 개별적으로 학습지도하는 것에서 파생된다고 본다.

b. 과학-수학 교과 간 연계성을 위한 수학적 모델링의 역할

많은 수학적 개념이 과학 현상에서 드러나 과학 문제의 해결과정에서 발생되어 왔다. 또한 이러한 수학적 개념은 다시 과학적인 현상을 설명하거나 예측하는 데 이용되었고 이것은 수학적 모델이라는 형태로 구현되었다. 이렇듯 불가분의 관계를 맺고 있는 교과들을 각 교과영역에 한정시킨 학습지도가 이루어질 때 학생들은 수학과 과학 교과 학습의 어려움을 경험하게 된다.

고등학교 1학년 과학 교과서 내용의 학습에는 일차함수, 이차함수, 비례, 반비례, 유리식, 통계, 원, 주기함수와 같은 10단계 수학의 개념이 사용된다. 비단 물리 분야만이 아니라, 화학, 생물, 지구과학의 여러 분야에서도 그래프를 해석하고 등식을 변형하는 것과 같은 기본적인 수학 능력이 이용되고 있다. 이것은 과학교과에서 수학적 모델의 구성과정이 있는 것처럼 보이게 하나 실지로는 과학 학습과정에서 단편적이고 도구적 수단으로 수학적 개념을 활용하거나, 반대로 수학 학습 과정의 활용문제로서 과학적 소재를 다루는 정도에 그 관계가 머무른 경우가 많다.

수학적 모델링은 과학적 상황 속에서 주도적으로 수학적 특징을 발견하고 수학적 개념을 이용해 과학적인 상황을 다시 재해석해낼 수 있는 학습으로의 확장을 지향한다. 다시 말해 학생들이 과학적 현상을 다룰 때는 현상에서 경험적 자료들을 수집한 후 그 현상을 정리할 수 있는 수단으로써 수학적 모델을 조직하고 이로부터 현상을 설명·예측하는 과정이 수학적 모델링의 과정인 것이다. 이러한 과학교과에의 수학교과와의 응용 과정을 다루는 학습지도는 학생들이 과학 학습의 어려움을 극복할 수 있게 할 것이며, 현실적인 상황을 정리하는 본질적인 수단과 방법으로서 수학을 학습할 수 있도록 하기에 수학의 진정한 응용을 경험할 수 있게 할 것이다. 이를 위해 수학과 과학을 통합하는 학습지도를 위한 수학적 모델링에 관한 다양한 소재를 개발해야 할 것이다.

(2) 과학과 수학을 통합하는 수학적 개념으로서의 삼각법

수학 교과서의 삼각함수 단원은 다양한 과학 관련 소재를 활용하여 문제해결 과제나 읽기 자료를 제시하는 등 다양한 소재를 활용하고 있음에도 불구하고, 그래프와 식을 제시하고 이를 해결하게 하는 **문제 해결** 위주의 활동이 다수를 차지하고 있다. 이는 단순히 과학적 소재를 이용한 문장제 문제와 크게 다르지 않다.



<수학교과서 중 삼각함수 단위에서의 탐구 주제 분석>

교과서 탐구주제	고려	교학	대한	두산	법문사	새한	중앙	지학
바이올리듬	주기 해석	문제해결	문제해결		수행평가	주기 해석		방정식해결
호흡		문제해결	식 계산					
낮의 길이	문제해결	그래프제시 주기 해석						일몰시각 data제시 모델링하기
평균기온								문제해결
파도				삼각함수 유형인식		문제 해결		
음파, 소리			읽기자료	문제해결	식 구하기		읽기자료 통신 신호	
인공위성의 궤도	문제해결							식 구하기
페리스 휠							식 구하기	
용수철		단진동 그래프해결		식 제시 단순 계산			주기 해석 식 구하기	그림 제시 식 구하기
기타 주제			읽기자료 - 굴절각			읽기자료 - 굴뚝 재단		



실생활과 관련된 과학적 문제 상황을 분석하여 이를 삼각비 혹은 삼각함수와 관련지어 생각해볼 수 있게 하고, 이를 나타내는 식을 직접 구해보게 하며 그 결과를 다시 재해석해 보게 하는 이른바 ‘수학적 모델링’ 활동은 몇몇에 그치고 있다. 과학적 사고를 키우고 실생활 문제에서 수학적 개념을 적절하게 활용할 수 있도록 하기 위해서는 수학적 모델링 활동에 대한 고려가 요구된다. 또한 교과서 별로 과학적 소재를 다루는 데 있어서 어떤 체계나 일관성이 부족하고 단편적인 구성에 그치고 있다. 이에 다음과 같이 삼각함수와 관련된 수학적 개념을 세 가지의 소주제로 나누고 그에 해당하는 과학적 소재를 활용할 수 있도록 한다.



a. 삼각비의 발견과 활용

운동하는 물체의 속도를 수직과 수평 방향으로 분해하여 10단계의 삼각비 개념을 이용해 표현할 수 있다. 이것은 오래 전에 경험적으로 알려진 사실이 갈릴레오 시대에 와서야 이론적 토대로 확립되어 가는 역사적 과정을 다름으로써 의미 있는 학습경험을 할 수 있을 것으로 기대한다. 또한 이는 미적분의 개념을 암묵적으로 활용하던 것과 달리 과학과 수학과목이 학년 체계상 자연스러운 연결 고리를 가질 수 있다는 의미가 있다. 삼각비와 관련된 소재로서 피라미드의 높이를 재거나, 그림자 탐구하기, 공 던지기 등을 활용할 수 있다.



b. 삼각함수를 이용한 주기 현상의 표현

파동에너지를 통해 다루는 주기의 개념을 보다 확장하여, 실생활에서 관찰되는 원운동, 지구의 다양한 주기 현상 등을 삼각함수로 분석해보는 데 의미가 있다. 원 운동하는 대관람차의 지면으로부터의 위치, 바닷물의 높이 등을 관찰함으로써 주기적 특징을 분석하고 표현해 본다.

c. 측정-구면삼각법

10단계 수학 교과에서 다루는 여러 삼각법의 공식들을 실생활 상황에 적용시켜 봄으로써 이미 배운 수학을 활용하여 생활 문제를 바라보는 시각을 다양화시킬 수 있도록 한다. 평면에서 삼각법을 다루는 것에서 더 나아가 공간에서의 삼각법을 다룬다. 실제 우리의 생활공간이 3차원 공간이라는 점에서 보다 직접적으로 활용의 묘미를 느껴볼 수 있을 것이다. 서울에서 샌프란시스코로 가는 항로가 왜 알래스카를 경유해서 돌아가는지와 같은 의문점을 해결할 수 있게 한다.



제 3 장 : 탐구 주제 선정 및 세부 활동

과학 교과서에서 주기적인 특징을 갖는 소재를 선별하고, 수학 교과서에서 삼각함수 단원이 갖는 특징을 활용하여 다음과 같은 주제와 세부 활동을 선정하였다.

< 2부 >	제목	세부 주제	수학적 모델	과학 교육과정	읽을거리
제 1 장	삼각비의 발견과 활용	활동 1. 피라미드의 높이를 재어라!	삼각비(탄젠트)	II. 힘과 에너지 1. 힘과 에너지 3. 파동 에너지	해시계
		활동 2. 포탄이 어디에 떨어질까?	삼각비 (사인, 코사인)		
보조 자료	수학적 모델링을 위한 수학적 도구의 이해	1. 계산기 다루기	주기함수		AM/FM
		2. 엑셀에서 그래프 그리기			
		3. 주기함수에 대하여			
제 2 장	원운동 속에 숨겨진 주기성-삼각함수	활동 3. 막대를 돌려라.	삼각함수 (주기, 진폭, 최대값, 최소값)	II. 힘과 에너지 1. 힘과 에너지 3. 파동 에너지 V. 지구 1. 지구의 변동 3. 태양계와 은하	지진해일
		활동 4. 갯벌에 언제 놀러 가면 좋을까?			
제 3 장	측정-구면삼각법	활동 5. 지구 위에 놓인 삼각형 - 구면삼각법	코사인 제2법칙		
		활동 6. 서울에서 제주까지의 거리는?	구면삼각법		
		활동 7. 서울에서 샌프란시스코까지의 거리는?	구면삼각법		

