탐구수업 지도자료

- 학　　년　　중학교 1학년
- 단　　원　　수학적 모델링
- 소 단 원　　지구 주위의 파편
- 제　　목　　교사용-새 탐구(1)
- 대표 저자　　조한혁(서울대학교)
  　　　　　　우정호(서울대학교)
- 공동 저자　　진만영(서울대학교)
  　　　　　　한　혁(서울대학교)
  　　　　　　김재홍(서울대학교)
  　　　　　　이은경(서울대학교)

이 자료는 서울대학교 과학교육연구소가 교육인적자원부의 과학교육연구기관으로 지정받아 수행하고 있는 「탐구·실험 중심의 과학교육 활성화를 위한 연구개발 사업」의 일환으로 개발되었습니다.

서울대학교 과학교육연구소
Seoul National University Science Education Research Center

10~12단계 새 탐구 교사용

지구 주위의 궤도를 그리며 돌고 있는 파편 문제를 해결해보자.

[우주]

지구 주위를 돌고 있는 인간이 만든 파편에 의해 야기된 우주의 오염 문제는 수학적 모델링을 공부하기 위한 문맥으로 사용될 수 있다. 본 활동은 학생들이 모든 문제가 정확한 측도와 답을 가지고 해결 가능한 것은 아님을 인식하고 수학적 모델을 통해 자료를 보고 예상되는 결과를 예측할 수 있음을 이해하도록 한다.

관련 영역

- 함수
- 모델링
- 통계
- 확률
- 기하

1 목표

궤도 파편의 증가에 따른 문제를 탐구하는 방법으로써 다양한 수학적 모델을 만들고 비교한다. 모델은 고등학교 학생들이 학습할 수 있도록 단순화된 것이지만 이를 통해 수학적 모델링 과정과 그 중요성을 이해할 수 있다. 학생들은 그래픽 계산기, 스프레드쉬트 등의 적절한 과학 기술을 이용할 수 있다.

2 도입

본 활동지를 통해 학생들이 수학적 모델링의 장점 및 단점을 이해할 수 있도록 한다. 모델은 (1) 알려진 현상을 설명하고 표현하는 능력, (2) 미래의 결과들을 예측하는 능력을 수행해야 한다. 따라서 학생들은 수학적 모델링을 학습하면서 “이와 같은 경향이 계속된다면 어떻게 될까?” 또는 “이 수치가 바뀌면 어떻게 될까?” 등을 계속 질문해야 한다.

본 연습지를 통해 학생들이 일차함수, 이차함수, 지수함수(모델)의 차이점과 그로부터 도출된 성장 패턴을 이해할 수 있도록 한다. 또한 우주의 광대함과 궤도 안에 무수히 많은 파편이 있지만 마주치면 치명적인 그 파편을 조우할 확률은 미미하다는 그럴듯한 역설을 보다 구체적으로 이해하고, 겉보기에 해결이 어려워 보이는 문제를 해결할 수 있도록 도와주는 수학의 힘을 인식할 수 있도록 한다.

본 활동지에 제시된 데이터들은 NASA 자료들에 포함된 것이다. 학생들이 데이터로 제시된 파편의 양이나 누적 비율이 일차함수, 이차함수, 삼차함수와 같은 다양한 가정 하에서 시간에 따라 어떻게 증가 또는 감소하는지 그리고 그 패턴이 어떻게 변화하는지에 초점을 맞추도록 한다. 그리고 그러한 양의 추정치를 발견했을 때, “이러한 새로운 자료를 설명하기 위해 모델을 어떻게 수정할 수 있을까?”를 질문하도록 한다.

3 우주 파편의 누적 모델링하기

① 우주 파편은 정말로 그렇게 나쁜 것인가?

본 활동지에 제시된 자료는 400만 파운드, 1년에 180만 파운드, 950만 파운드와 같은 수치를 포함한다. 이러한 수치를 접하는데 익숙해져 있긴 하지만 그 수치들이 나타내는 값을 직관적으로 인식하는 것은 매우 어려운 일이다. 활동지의 초반에는 학생들에게 그러한 양이 의미하는 바에 대한 구체적인 모델을 제시한다. "950만 파운드의 동전은 …을 채울 수 있다."와 같은 보기를 수월하게 다룰 수 있도록 한다.

학생들이 우주 파편의 문제 문맥과 학생들에게 익숙한 거리-속도-시간 문제를 관련시킬 수 있어야 한다. 이들은 모두 특정 조건 하에서 일차함수에 의해 모델링될 수 있다.

② 문제를 모델링하기 : 일차함수

본 활동지는 학생들이 간단한 수학적 모델을 만들고 분석하는데 매우 유용한 자료이다. 수학자들은 문제를 적절하게 표현할 수 있는 가장 단순한 모델을 찾으려 한다. 따라서 먼저 학생들로 하여금 매년 더해지는 파운드 양에 기초하여 누적된 우주 파편의 양을 나타내기 위해 일차함수 모델을 만들도록 하는 것이 바람직할 것이다. 학생들은 연간 누적 비율(증가 속도)이 180만 파운드이고 초기의 양이 400만 파운드라는 것을 알 수 있다. 연도를 t (1990년도에 $t=1$)로 파편의 총량을 y로 나타낸다면 일차함수 모델은 $y=1.8t+4$가 된다. 마찬가지로 연간 누적 비율이 270만 파운드라면 일차함수 모델은 $y=2.7t+4$가 된다. 일차함수 모델을 도출한 후 다음과 같은 새로운 문제를 제기할 수 있다: (1) 언제 950만 파운드가 누적되는가? (2) 각각의 모델은 상황을 실제적으로 기술하고 있는가? 본 활동을 속도와 관련하여 나타내 보도록 하자. 학생들은 거리-속도-시간 문제에 익숙하다. 따라서 학생들은 일정 비율로 증가하는 파편의 양이 일정한 속도로 움직일 때 증가하는 이동 거리에 해당함을 알 수 있어야 한다. 학생들은 두 개의 일차방정식 또는 표를 이용하여 950만 파운드가 첫 번째 비율의 경우에는 3년 이후에, 두 번째 비율의 경우에는 2년 이후에 누적됨을 이해할 수 있다(<표 1>을 보자).

<표 1> 궤도 파편의 누적

연도	누적량 (백만 파운드)	연말 (백만 파운드)	누적량 (백만 파운드)	연말 (백만 파운드)
1990	1.8	5.8	2.7	6.7
1991	1.8	7.6	2.7	9.4

서울대학교 과학교육연구소

언제 950만 파운드가 누적되는지 정확히 예측할 수 없다는 사실을 고려하여 논의가 이루어져야 할 것이다. 예측을 위해서는 학생들이 뒤에서 다루겠지만 다른 요소들도 고려되어야 한다. 또한 180만 파운드, 270만 파운드의 비율은 모두 1990년도부터 2000년도까지 전체 기간 동안 적용되는 것이 아니기 때문에 어떤 모델도 정확한 것은 아님을 학생들이 이해해야 한다.

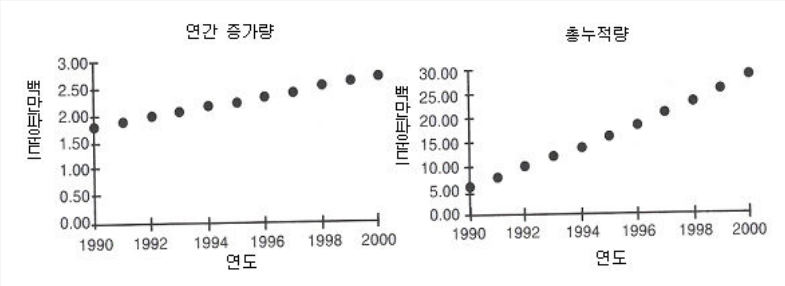
③ 모델을 정교화하기 : 이차함수

학생들은 초기의 두 모델이 상황을 사실적으로 표현하지 못하고 있음을 파악하고, 180만 파운드, 270만 파운드의 비율 모두 기간 동안 지속되는 것이 아니라는 사실을 설명하기 위해 모델을 수정해야만 한다. 과학자 및 수학자들은 단순한 모델에서 시작하여 필요에 따라 복잡한 조건들을 추가하여 모델을 정교화하는 것을 선호한다. 따라서 여기서는 시간에 따라 증가 비율을 변화시키기로 한다. 즉 파편의 누적 비율을 연간 180만 파운드에서 270만 파운드까지 일정한 비율로 증가하도록 한다. 10년 동안 연간 90만 파운드가 증가한 것이므로 매년 연간 9만 파운드씩 증가한 것으로 계산하면 될 것이다. 학생들은 표를 만들고 좌표 데이터 (0, 1.8)과 (10, 2.7)를 이용하여 시간에 따른 누적 비율 그래프를 그릴 수 있다. 이러한 누적 비율의 변화는 방정식 $d = 0.09a + 1.8$ (1990년도에 $a = 0$)으로 표현할 수 있다. 누적 비율 및 총 누적량의 증가는 <표 2>와 <그림 1> 에 제시되어 있다.

<표 2> 누적 비율과 총누적량

연도	그 해의 누적량 (백만 파운드)	연말 총누적량 (백만 파운드)
1990	1.80	5.80
1991	1.89	7.69
1992	1.98	9.67
1993	2.07	11.74
1994	2.16	13.90
1995	2.25	16.15
1996	2.34	18.49
1997	2.43	20.92
1998	2.52	23.44
1999	2.61	26.05
2000	2.70	28.75

서울대학교 과학교육연구소
서울대학교 과학교육연구소



<그림 1> 파편의 연간 증가량과 총누적량 그래프

여기에서 다음 사실에 주의해야 한다. 초기 데이터에서 10년 동안의 그래프는 일차함수인 것처럼 보이지만 정의역을 20년, 30년, 50년으로 확장하면 총누적량 그래프는 일차함수가 되지 않음을 확인할 수 있다. 총누적량 그래프가 이차함수가 된다는 사실은 다양한 관점에서 접근할 수 있다:

· 학생들은 손으로 가장 적합한 선을 그리고 표의 패턴을 통해 예측한 바에 비추어 그것을 점검할 수 있다.
· 학생들은 그래픽 계산기로 일차함수 및 이차함수를 그리고 좌표평면 위에 표시된 그래프의 데이터를 읽을 수 있다.
· 학생들은 이차함수를 만들기 위해 등차법과 표에서 얻은 데이터를 이용할 수 있다. 이 방법은 ④에 자세하게 기술되어 있다.

④ 등차법 적용

㉠ 일차함수에서 x가 정수인 경우 연속하는 $f(x)$의 값 사이의 차는 일정하다는 사실을 기억하자. 이를 “첫 번째 차”라 부르도록 한다. 이차함수의 경우 첫 번째 차는 일정하지 않지만 그 첫 번째 차들의 차, 즉 “두 번째 차"는 일정하다. 이러한 패턴은 고차 다항 함수에도 적용될 수 있다. 예를 들어 삼차함수의 경우 세 번째 차가 일정하고 사차함수의 경우 네 번째 차가 일정하게 된다. <표 3>은 일반적인 일차함수 및 이차함수의 패턴과 파편 문제라는 특정 사례의 패턴을 보여준다.

㉡ <표 3>의 데이터를 이용하여 다음 방정식을 만들고, 이를 a, b, c에 대해 풀어 보자.

$$\begin{aligned} a+b+c &= 5.8 & \qquad c &= 4 \\ 3a+b &= 1.89 & \qquad b &= 1.755 \\ 2a &= 0.09 & \qquad a &= 0.045 \end{aligned}$$

서울대학교 과학교육연구소
서울대학교 과학교육연구소

우리가 얻은 방정식은 $f(x) = 0.045x^2 + 1.755x + 4$ 이다. 이때 1990년도에 x 는 1이며, $f(x)$ 는 x 년도 말 파편의 총량을 나타낸다.

<표 3> 일반적인 일차함수 및 이차함수의 패턴과 그 예

일차함수: $f(x) = ax + b$				
	일반적인 경우		$f(x) = 1.8x + 4$	
$x =$	$f(x)$	첫 번째 차	$f(x)$	첫 번째 차
1	$a + b$		5.8	
		a		1.8
2	$2a + b$		7.6	
		a		1.8
3	$3a + b$		9.4	
		a		1.8
4	$4a + b$		11.2	

이차함수: $f(x) = ax^2 + bx + c$						
	일반적인 경우			파편의 예		
$x =$	$f(x)$	첫 번째 차	두 번째 차	$f(x)$	첫 번째 차	두 번째 차
1	$a + b + c$			5.8		
		$3a + b$			1.89	
2	$4a + 2b + c$		$2a$	7.69		0.09
		$5a + b$			1.98	
3	$9a + 3b + c$		$2a$	9.67		0.09
		$7a + b$			2.07	
4	$16a + 4b + c$			11.74		

⑤ 속도 – 가속도 유추

우주 파편의 누적에 대한 이차함수 모델은 등가속도 운동과 동일함을 알 수 있다.

파편을 나타내는 이차함수 모델을 등가속도 운동이라는 보다 친숙한 경우와 비교해보도록 한다. 물리 수업에서 운동에 대한 내용을 학습한 학생들은 자유 낙하, 빗면을 구르는 공, 등가속도로

움직이는 차 등과 같이 일정한 가속도로 움직이는 예들과 우주 파편의 등가속도 누적을 관련지을 수 있어야 한다. 수학 성취도가 높은 학생들에게는 일차방정식 $d = 0.09x + 1.8$ (x 는 1990년 이래 연도 수)이 앞에서 구한 이차 곡선 $y = 0.045x^2 + 1.755x + 4$ 의 기울기 함수가 됨을 이해하도록 한다. 즉 첫 번째 방정식이 두 번째 방정식의 도함수가 된다는 것을 지도한다.

등가속도 운동과 동일함을 알 수 있다.

학생들은 “누적 비율(속도)” (예를 들어 1990년에 연간 180만 파운드)과 “10년간 누적 비율의 총 변화” (즉 1990년 연간 180만 파운드의 비율에서 2000년 연간 270만 파운드의 비율 사이의 90만 파운드의 증가량) 그리고 “누적 속도의 변화 비율(가속도)” (즉 매년 연간 9만 파운드씩의 증가) 개념을 구별하는데 어려움을 느낄 것이다. 이러한 개념들을 지도하는 데 각별한 주의가 요구된다고 하겠다.

학생들로 하여금 이차함수 모델 $y = 0.045x^2 + 1.755x + 4$ 을 두 개의 일차함수 모델 $y = 1.8x + 4$, $y = 2.7x + 4$ 과 비교해 보도록 하자. 학생들은 쉽게 이차함수의 그래프가 두 일차함수의 그래프 사이에 놓여 있음을 발견할 수 있다. 이를 누적 비율이 연간 180만 파운드에 머무르는 경우, 연간 270만 파운드인 경우 또는 연간 180만 파운드에서 270만 파운드까지 점차적으로 변하는 경우 어떤 결과가 있을지와 관련하여 해석하도록 한다. 또한 이차함수의 값이 언제 두 번째 일차함수의 값보다 커지는지를 판별하고, 그 점 이후부터는 이차함수의 값이 항상 일차함수의 값보다 크다는 것을 이해할 수 있어야 한다.

⑥ 지수함수

본 활동지에 제시된 세 번째 모델은 지수함수이다. “파편이 이전 파편의 양의 고정된 퍼센트 만큼 누적된다면 어떻게 될까?” 이 문제는 학생들에게 친숙한 복리 문제와 유사하며, 지수함수 개념을 학습하기 위한 대안적인 문맥을 제공해 준다. 학생들이 스프레드쉬트를 사용하도록 한다.

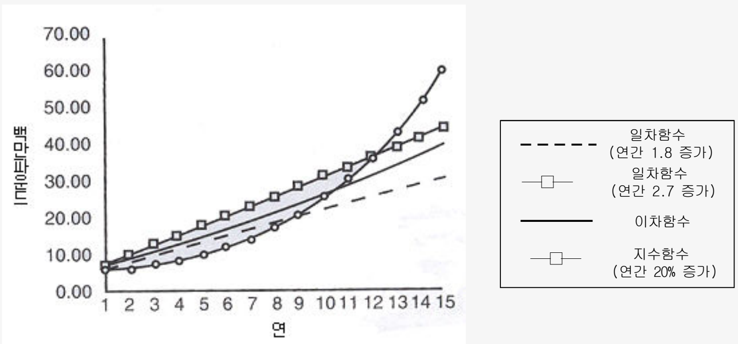
지수함수 모델은 복리 문제와 유사하다.

본 절에서는 학생들이 지수함수의 장점을 느낄 수 있도록 지도하는 것을 목표로 한다. 학생들이 스프레드쉬트를 통해 다양한 증가 비율을 가정하고 그 결과를 조사하며, 그 결과물을 일차함수 및 이차함수의 패턴과 비교해보도록 한다. 몇 가지 예들이 <표 4>와 <그림 2>에 제시되어 있다.

<표 4> 일차함수, 이차함수, 지수함수의 예

연	일차함수 연간 1.8증가	일차함수 연간 2.7 증가	이차함수	지수함수 연간 20% 증가	지수함수 연간 10% 증가
1	5.80	6.70	5.80	4.80	4.40
2	7.60	9.40	7.69	5.76	4.84
3	9.40	12.10	9.67	6.91	5.32
4	11.20	14.80	11.74	8.29	5.86
5	13.00	17.50	13.90	9.95	6.44
10	22.00	31.00	26.05	24.77	10.37
20	40.00	58.00	57.10	153.35	26.91
30	58.00	85.00	97.15	949.51	69.80
50	94.00	139.00	204.25	36401.75	469.56

학생들은 그래프가 의미하는 바를 논리적으로 설명할 수 있어야 하며, 그래프를 이용하여 각 모델에서 그래프에 제시되지 않은 연도의 수치를 예상할 수 있어야 한다.



<그림 2> 4가지 모델의 비교

⑦ 모델 확장하기

학생들은 지구 주위를 궤도를 그리며 돌고 있는 모든 것들이 영원히 그 자리에 있는 것은 아니라는 사실을 인식해야 한다. 지구 주위를 돌고 있는 물체는 대기권으로 들어와 타버리거나 또는 지구로 다시 되돌아 올 수도 있다. 실제적으로 학생들은 궤도를 그리며 돌고 있는 파편의 누적 뿐 아니라 소멸도 다루어야 한다.

본 절에서는 구체적인 데이터를 제시하지 않았기 때문에 스스로 가정을 세우고 이를 검증할 기회를 가지도록 하면 된다. 학생들은 연간 동일한 비율 및 일정한 비율의 감소를 가정하도록 모델을 변형하기 위해 노력할 것이다. NASA 및 다른 기관에서 로켓 및 우주선 등을 계속 발사할 것이기 때문에 파편의 양은 증가할 것이지만 궁극적으로 파편의 양이 소멸될 것으로 예측되는 모델을 찾을 수 있다. 이러한 개방형 탐구는 비록 실제에서는 학생들이 찾은 모델들을 보충하기 위해 적절한 과학 기술을 발명할 필

요가 있을지라도 학생들로 하여금 바람직한 결과를 유도하는 모델을 찾는 경험을 할 수 있도록 고안된 것이다.

⑧ 모델 응용하기

마지막으로 학생들에게 “만일 ~라면 어떻게 될까?”와 같은 질문을 만들고 그 해답을 도출하기 위해 자신들이 찾은 모델을 이용하도록 한다. 학생들에게 질문을 형식화하도록 하기 전에 교사들 스스로 몇몇 질문들을 제기하고자 할 수도 있다. 그 예는 다음과 같다:

학생들이 제기한 질문 및 그 질문에 대한 답을 통해 학생들의 개념에 대한 이해 정도를 파악할 수 있다.

- 우리가 1995년도 말에 파편이 누적되는 것을 멈출 수 있다면 그리고 다음 3년 동안 연간 35만 파운드의 비율로 존재하는 파편의 양을 감소시킬 수 있다면 어떻게 될까? 몇 퍼센트가 감소될까? 해답은 1990년~1995년 사이의 증가 비율과 관련하여 어떤 가정을 했는가에 따라 달라질 것임에 주목하자.
- 1999년 초에 새로운 과학 기술로 인해 2년 동안 감소 비율이 연간 65만 파운드로 개선되었다면 어떻게 될까? 2000년도 말에 남아 있는 파편의 총량은 얼마일까?