

탐구수업 지도자료

- 학 년 중학교 1학년
- 단 원 수학적 모델링
- 소 단 원 지구 주위의 파편
- 제 목 학생용-교과서 탐구(1)
- 대표 저자 조한혁(서울대학교)
 우정호(서울대학교)
- 공동 저자 진만영(서울대학교)
 한 혁(서울대학교)
 김재홍(서울대학교)
 이은경(서울대학교)

이 자료는 서울대학교 과학교육연구소가 교육인적자원부의 과학교육연구 기관으로 지정받아 수행하고 있는 「탐구·실험 중심의 과학교육 활성화를 위한 연구개발 사업」의 일환으로 개발되었습니다.



서울대학교 과학교육연구소

Seoul National University Science Education Research Center

지구 주위에 궤도를 그리며 돌고 있는 파편 문제를 해결해 보자.

[우주]

()년 ()월 ()일 ()학년 ()반 ()번 이름 ()

우주선, 로켓 등의 발사로 인해 발생한 파편은 지구 주위에 궤도를 그리며 돌고 있다. 이러한 파편은 점차 그 양이 증가하면서 우주의 오염 문제를 야기하고 있다. 이러한 파편의 누적을 수학적으로 표현할 수는 없을까?



서울대학교
과학교육연구소

1 목표

궤도 파편의 증가에 따른 문제를 탐구하는 방법으로써 다양한 수학적 모델을 만들고 비교한다.

2 과정(우주 파편의 누적 모델링하기)

① 우주 파편은 정말로 그렇게 나쁜 것인가?

NASA 및 우주 과학자들은 지구 주위에 궤도를 그리며 돌고 있는 파편의 누적 문제를 다루고 있다. 이러한 파편은 로켓 발사시 분리되는 보조 로켓, 물체의 충돌 시 발생하는 잔해물, 페인트 조각 등과 같은 무수히 많은 작은 입자를 포함한다. 지구 궤도에서 물체는 약 17500(마일/시)의 속도로 회전하고 있기 때문에 아주 미세한 입자와의 충돌도 비극적인 결과를 초래할 수 있다. 1990년에 과학자들은 지구 궤도에 대략 총 400만 파운드의 파편이 누적되어 있으며, 연간 180만 파운드의 파편이 증가하고 있어 곧 누적된 파편의 총량이 950만 파운드에 이를 것이라고 추정하였다. 또한 파편의 연간 누적 비율이 2000년도까지 연간 270만 파운드로 증가할 것이라 예상하였다.



서울대학교
과학교육연구소

- ◆ 400만 파운드는 얼마나 큰 양인가? 950만 파운드는 어떠한가? 다른 사람이 백만 파운드의 파편이 어느 정도의 양인지 감을 지닐 수 있도록 세 가지 이상의 구체적인 보기를 들어 보자. 예를 들어, 다음 문장을 완성해 보자.



서울대학교
과학교육연구소

- 총 950만 파운드의 동전은 ()을 채울 수 있다.

② 문제를 모델링하기 : 일차함수

우주에 있는 파편의 총량 및 예상되는 누적 비율을 판별하는 문제는 직접적으로 해결될 수 없다. 우리가 직접 궤도에서 파편을 세고, 그 무게를 측정할 수 없기 때문이다. 또한 파편이 언제 충돌할지도 확실하게 예측할 수 없다. 대신 우리는 문제를 표현하고 경향을 분석하여 결과를 예상하는데 도움이 되는 수학적 모델에 의존하여야 한다. 본 활동지에서는 궤도 파편의 누적 문제를 탐구하는데 도움이 되는 다양한 수학적 모델을 만들고 비교할 것이다. 이 모델은 계산기, 스프레드시트, 그래픽 계산기 등을 사용하여 탐구할 수 있도록 매우 단순화되어 있다. 그러나 모델을 다루는 동안 수학적 모델링 과정과 수학적 모델링의 장점을 이해할 수 있을 것이다.

모델을 만들 때 수학자들은 문제 상황을 적절하게 표현할 수 있는 가장 단순한 모델을 선호한다. 일반적으로 일차함수 모델이 가장 단순한 형태이다. 따라서 1990년도의 누적 비율(증가 속도)이 180만 파운드이고 1990년도 초 파편의 양이 400만 파운드라는 앞에서 제시된 보도 자료를 이용하여, 주어진 연도 t 의 궤도 파편의 총량을 예측할 수 있는 일차함수 모델을 적어보자. 단 1990년도에 $t = 1$ 이라 가정한다.

연간 누적 비율이 270만 파운드이고 1990년도 초 파편의 총량이 400만 파운드인 경우 두 번째 일차함수 모델을 적어보자.

각 모델을 이용하여 몇 년도에 950만 파운드의 궤도 파편이 누적되는지를 예상해보자.



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교

제 2 단 원
제 2 부



서울대학교
과학교육연구소

· 첫 번째 모델의 경우 :

· 두 번째 모델의 경우 :

◆ 자동차가 t 시간 동안 일정한 속도 r 로 움직이는 경우 자동차로 이동한 거리는 일차함수로 모델링할 수 있다. 거리-속도-시간을 나타내는 익숙한 일차함수 모델을 우주 파편의 누적을 나타내는 일차함수 모델과 비교해 보자. 왜 이 일차함수 모델을 우주 파편의 누적을 나타내는 “등속 모델”이라 할 수 있는가?

◆ 각각의 모델은 파편의 누적이라는 실제적 상황을 정확하게 나타내고 있다고 생각하는가? 왜 그렇게 생각하는가? 또는 왜 그렇게 생각하지 않는가?

③ 모델을 정교화하기 : 이차함수

연간 180만 파운드, 270만 파운드의 비율을 통해 우리는 1990년에서 2000년 사이에 누적되는 파편의 총량을 예측할 수 있도록 하는가? 어떤 누적 비율을 사용해야 하는가? 사실 연간 누적되는 파편의 양은 변하고 있다. 그렇다면 연간 어느 정도의 파편이 누적되는가? 이는 등속도가 아니라 가속도 문제와 관련이 있다. 따라서 모델을 수정할 필요가 있다.

다시 가장 간단한 가정을 해보자: 파편의 누적 비율이 1990년도에 연간 180만 파운드에서 2000년도에 270만 파운드로 일정한 비율로 증가한다.

이 변화는 1990년에서 2000년도까지 10년 동안 연간 누적 비율(속도)이 90만 파운드($270-180=90$) 증가할 것임을 의미한다. 따라서 연간 누적 비율이 매년 연간 9만 파운드씩 증가할 것이라 예상할 수 있다. 연간 누적량 및 총 누적량을 나타내는 다음 표를 완성해보자.



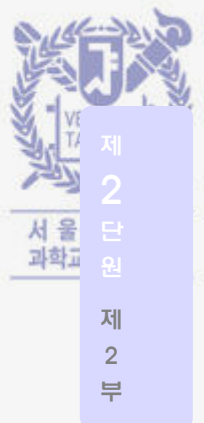
연 도	그 해의 누적량 (백만 파운드)	연말 총누적량 (백만 파운드)
1990	1.8	5.8
1991		
1992		
1993		
1994		
1995		
1996		
1997		
1998		
1999		
2000		



누적 속도가 매년 일정하게 증가할 것이라 가정했기 때문에 연간 누적 비율의 증가를 기술하는 일차방정식을 1990년도 이래로 시간에 대한 함수로 나타낼 수 있다. 이를 기술해 보자. 이 경우 1990년도 180만 파운드의 비율을 기준 비율로 가정했으므로 1990년도에 $a = 0$ 이라 한다. 그러면 방정식 $d=f(a)$ 는 1990년도 이후 연간 누적 비율을 나타낸다.



- ◆ 위에 적은 방정식이 나타내는 누적 비율이 매년 일정하게 증가하는 상황은 초기 속도 v_0 에서 마지막 속도 v_f 까지 등가속도로 움직이는 차의 운동과 유사하다. 위의 표에 제시된 데이터를 사용하여 1990년도부터 2000년도까지 파편의 연간 증가량과 총 누적량을 좌표평면 위에 점으로 나타내 보자.
- ◆ 데이터에 적합한 선을 그리고 파편의 누적 그래프가 일차함수인 것처럼 보이는지 판별하여라. 결론 및 그러한 결론을 내리게 된 근거를 기술하여라.



- ◆ 그래픽 계산기 또는 컴퓨터 그래픽 프로그램을 사용하여 데이터를 나타내는 일차방정식을 구하여라. 계산 결과, 선형 관계가 유지되는가? 그래픽 계산기 또는 컴퓨터 그래픽 프로그램을 사용하여 얻은 선과 손으로 그린 선을 어떻게 비교하겠는가?



서울대학교
과학교육연구소

④ 등차법 적용

- ◆ 다음으로 데이터를 나타내는 이차방정식을 만들어 보자. 이차함수 모델을 기술하여라.

이 방정식은 일차함수 모델과 비교하여 주어진 데이터에 얼마나 정확하게 부합하는가?

- ◆ 이차함수 모델을 앞에서 이미 개발한 두 개의 일차함수 모델과 비교해보자. 각각의 모델들을 이용하여 20년, 30년, 50년 뒤 파편의 총누적량을 예측하여라. 시간에 따른 일차함수 모델 및 이차함수 모델 그래프의 형태를 기술하여라.



서울대학교
과학교육연구소

- ◆ 1990년도부터 2000년도까지 이차함수 모델의 그래프는 두 일차함수 모델의 그래프 사이에 놓여 있다. 왜 이런 결과가 발생하는지 설명하여라. 이차함수의 그래프는 항상 두 개의 일차함수 그래프 사이에 놓이는가? 이를 설명하여라.



서울대학교
과학교육연구소

⑤ 속도 - 가속도 유추

- ◆ 파편 문제를 나타내는 이차함수 모델을 등가속도 모델로 나타낼 수 있는 이유를 설명하여라.

⑥ 지수함수

지금까지 두 가지 모델, “등속도” 일차함수 모델과 “등가속도” 이차함수 모델을 다루어 보았다. 또 다른 모델을 살펴보도록 하자.

연간 파편의 누적량이 매년 일정하게 증가하는 것이 아니라 이전 파편의 양의 고정된 퍼센트 만큼 누적된다고 가정하자. 이러한 상황은 복리 문제와 유사하다. 예를 들어 초기 파편의 양이 400만 파운드인 경우 매년 전년도 파편의 양의 20%가 누적된다면 어떤 일이 발생하겠는가? 1990년도부터 2000년도까지의 기간 동안 누적되는 파편의 양을 예측하기 위해 다음 표를 완성하여라(스프레드시트를 사용하도록 한다).

연 도	누적량 연간 20% 증가 (백만 파운드)	연말 총누적량 (백만 파운드)
(1989)	(N/A)	4
1990	0.8	4.8
1991	0.96	
1992		
1993		
1994		
1995		
1996		
1997		
1998		
1999		
2000		

초기 400만 파운드의 파편이 시간에 따라 증가하는 것을 나타내는 지수함수 모델을 기술하여라.



서울대학교
과학교육연구소



서울
대학교
과학교

제 2 단 원
제 2 부



서울대학교
과학교육연구소

- ◆ 지수함수 모델을 이용하여 20년, 30년, 50년 뒤 파편의 총누적량을 예측하여라.

- ◆ 우주 파편의 양이 지수함수 모델을 따라 증가하고 우주 파편의 양이 두 배가 되는데 12년이 걸린다고 하자. 이렇게 12년 동안 우주 파편의 양이 두 배가 되기 위해서는 연간 몇 퍼센트씩 증가해야 하는가?



⑦ 모델 확장하기

지금까지 개발한 모델들은 매년 증가하는 파편들이 궤도에 머물며 누적된다고 가정하였다. 그러나 사실 파편의 일부는 매년 대기권으로 들어와 타버리거나 때로는 지구로 다시 되돌아 오기도 한다. 어느 해 초 파편의 양의 10%가 1년 동안 소멸되었다고 가정하자. 궤도 상에 이미 존재했던 파편의 양의 10%는 소멸되었지만 매년 계속해서 파편이 누적되는 상황을 설명하도록 하기 위해 앞에서 개발한 일차함수 모델, 이차함수 모델, 지수함수 모델을 수정하여라.

- ◆ 일차함수 모델, 이차함수 모델, 지수함수 모델 중 어느 경우에 10%의 소멸 비율을 가정한 것이 가장 큰 영향을 미치는가?

- ◆ 모델 생성시와 동일한 파편 누적 비율을 가정하고 궤도 파편의 연간 소멸 비율을 다양하게 가정해보자. 각 경우에 매년 계속해서 파편이 누적됨에도 불구하고 파편의 총량은 감소되는 그러한 소멸 비율이 존재하는가? 이러한 비율의 존재 여부를 아는 것의 이점은 무엇인가?



⑧ 모델 응용하기

수학적 모델은 “만일 ~라면 어떻게 될까?”와 같은 질문을 도출할 수 있는 능력을 증진시킨다는 장점이 있다. 질문의 예는 다음과 같다:



궤도 궤편의 소멸 비율이 증가한다면 어떻게 될까?, 궤도 궤편의 증가 비율이 감소한다면 어떻게 될까? 연간 궤편의 누적 비율은 감소하고, 존재하는 궤편의 양이 소멸되는 비율을 증가시킬 수 있는 방법을 발견했다면 어떻게 될까? 이러한 질문들을 통해 수학적 모델을 이용한 개방형 탐구를 할 수 있다.

◆ 파트너와 또는 소그룹으로 탐구하고 싶은 2~3개의 구체적인 질문들을 만들어 보자.

- 라면 어떻게 될까?
- 라면 어떻게 될까?
- 라면 어떻게 될까?

스프레드시트, 그래픽 도구 또는 다른 적절한 과학 기술을 이용하여 위의 질문에 대해 탐구하기 위한 계획을 기술하여라.

데이터가 무엇을 나타내는 것인지, 탐구 결과가 무엇인지를 기술한 설명을 덧붙인 데이터의 사본을 준비하여라.

모델들 및 산출된 정보를 이용하여 친구들 앞에서 발표를 해 보자. 이 때 발표는 궤도 궤편 문제를 다루기 위해 자신이 취한 단계들 및 그렇게 하지 않았을 경우 가능한 결과들을 친구들이 예측할 수 있도록 이루어져야 한다.



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소