

탐구수업 지도자료

- 학 년 중학교 1학년
- 단 원 수학적 모델링
- 제 목 수학적 모델링이란
- 대표 저자 조한혁(서울대학교)
 우정호(서울대학교)
- 공동 저자 진만영(서울대학교)
 한 혁(서울대학교)
 김재홍(서울대학교)
 이은경(서울대학교)

이 자료는 서울대학교 과학교육연구소가 교육인적자원부의 과학교육연구 기관으로 지정받아 수행하고 있는 「탐구·실험 중심의 과학교육 활성화를 위한 연구개발 사업」의 일환으로 개발되었습니다.



서울대학교 과학교육연구소

Seoul National University Science Education Research Center

제1장 수학적 모델링

[수학적 모델링이란]

수학적 모델링이란 자연현상, 물리적인 상황, 실생활 상황 등의 현실 세계와 관련된 여러 가지 문제를 수학적 모델을 구성하여 해결하는 전 과정이다. 수학적 모델은 복잡한 현상을 이상화하여 그 요소 사이의 관계를 나타낸 수학적 표현을 의미하며, 수학적 모델링은 여러 가지 문제를 수학적 모델로 수학화하여 수학 내에서 문제를 해결하고 그 결과를 원래의 문제와 관련지어 해석하는 문제해결 과정 전체를 말한다. 수학적 모델링의 과정은 현실세계 문제를 이해하는 것에서부터 출발하여 문제를 구조화하고 변수를 선택하여 그 변수 사이의 관계에 대한 가설을 세우고 이를 수학적으로 나타내어 해결한 다음, 실세계 자료를 사용하여 그 타당성을 검증하여 해를 구하는 과정이다. 현실 상황이 단순화되어 모델로 바뀌고, 이것이 다시 수학적 모델로 바뀌게 된다. 수학적 모델이 만들어진 후 그 모델을 기초로 하여 수학적 추론을 하게 되며, 그 결과를 현실 상황과 연관시켜 재해석한다. 그리고 그 결과는 사용된 수학적 모델의 유용성을 결정하기 위하여 다른 현실 세계 문제와 비교하여 검증된다. 비교 결과 사용된 모델이 유용한 정보를 제공하고 있지 않다면, 결과를 개선하기 위해 모델링 과정의 각 단계를 재고해 보아야 한다. 이와 같이 현실 문제를 단순화하여 합리적으로 간결하게 기술한 현실적 모델을 구성하고, 이를 수학적 기호로 형식화하여 수학적 모델을 만든 후 이를 기초로 수학적으로 추론하고 그 결과를 현실 상황에서 재해석하는 전 과정이 수학적 모델링인 것이다.

모델링의 과정은 다음과 같다.

- ① 모델을 구성하기 위해 현실 문제의 제 특성을 추출한다.
 - ② 목적에 유용한 대상, 관계 등을 선택한다.
 - ③ 그것들을 수학적 표상에 알맞은 형태로 만든다.
 - ④ 모델이 성립하는 전체집합을 선택한다.
 - ⑤ 현실 상황을 수학으로 번역한다.
 - ⑥ 번역된 대상 사이의 수학적 관계를 확립한다.
 - ⑦ 수학적 방법을 이용하여 수학적 결과와 결론을 도출한다.
 - ⑧ 이들을 현실 문제와 관련지워 해석하여 결론을 도출한다.
- 이 과정에는 다음의 과정을 부가할 수 있다.
- ⑨ 다른 모델과 비교하고 이미 확립되어 있는 이론과 연결지어 봄으로써 모델을 평가한다.
 - ⑩ 필요하다면, 새로운 또는 수정된 모델을 구성하여 ①-⑧단계를 다시 한 번 수행한다.

모델링 과정은 이와 반드시 일치하는 기계적인 작업은 아니며 모델의 구성과 해결과정은 점진적으로 세련되어 가는 것이다. 위의 수학적 모델링 곧, 수학적 모델 구성을 통한 문제 해결 과정은 다음과 같이 4단계 과정으로 구분할 수 있다.



제 2 단 원 제 1 부



① 1단계 : 문제의 이상화 단계

현실세계의 문제 상황을 파악하고, 그 문제에 영향을 주는 중요한 요인들을 추출하여 문제를 단순화하고 간결한 형태로 표현한다. 이 단계에서 현실적 모델이 형성된다. 비수학적 상황에서 수학을 사용하기 위해서는 상황을 구조화하고 고려할 측면과 문제가 되고 있는 것을 명확히 하는 것이 필요하다. 이를 통해 상황이 단순화되고 이상화된다. 다양한 내재적, 외재적 가정과 조건이 그 이상화된 상황 속에 부과된다. 이렇게 비수학적 상황이 이상화된 단계에서 나타난 결과가 현실적 모델이다.

② 2단계 : 번역 단계

현실적 모델을 수학적 모델로 바꾸는 단계로 요인 사이의 관계를 추측하고, 그 관계를 수학적으로 해석하여 그 현상에 대한 수학적 모델을 구성한다. 이 단계는 수학적 모델(수학적 형식화)이라고 불리며, 현실적 모델에서 일상 용어와 개념을 수학적 기호와 표현으로 바꾼다. 즉 수학적 모델 단계는 현실적 모델에서 가장 중요한 것으로 생각되는 요소와 그 사이의 관계를 수학적 대상과 그 사이의 관계로 바꾸는 단계이다.

③ 3단계 : 수학적 추론 단계

수학적 방법을 이용하여 수학적 결론을 도출한다. 즉 구성된 수학적 모델에 수학적 방법을 사용하여 결론을 유도한다. 이 때 포함되는 수학적 모델은 구성하는 사람의 능력에 따라 다를 수 있다. 실제로는 문제가 정확하게 해결될 수 없는 경우가 생기며, 이 때에는 좀 더 많은 가정을 고려할 필요가 있다. 모델링 활동에서 수학적 어려움을 예상하고 초기 가정을 단순화하여 해결하려는 경향이 있는데, 이는 경험이 부족한 학생들을 당황하게 한다.

④ 4단계 : 해석단계

앞 단계에서 추론된 결과를 원래의 문제상황의 맥락에서 재해석하여 결론을 유도한다. 원래의 문제상황에 비추어 수학적 결과를 재해석함으로써 최종 결론을 얻는다. 수학적 모델 단계에서는 현실 상황을 수학 상황으로 바꾸는 은유적 사고 과정을 거치는데, 수학적 해의 해석 단계에서는 그것의 역사적 과정이 발생한다. 만약 추론된 수학적 결론이 상황에 적합하지 않으면 모델 자체를 수정하고 앞의 단계를 되풀이한다. 가능하면 다른 모델과도 비교하고 이미 확립되어 있는 이론과 연결지어 봄으로써 모델을 평가한다. 학생들이 배워야 할 것은 수학적 모델이나 결과가 아니라 모델링 과정이며 실세계 상황 문제를 해결하는 방법이므로 학생들은 서너 번 이상을 순환하는 경험을 가지는 것이 바람직하다.



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소

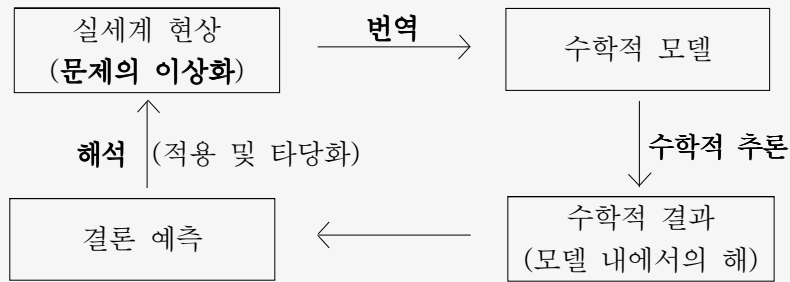


그림 1 수학적 모델링 단계



서울대학교
과학교육연구소

[수학적 모델링의 예]

수학적 모델링의 구체적인 모습을 제시하면 다음과 같다. 문제는 9세기에 제기되어 1654년 프랑스 수학자 Pierre Fermat와 Blaise Pascal에 의해 해결된 유명한 확률 문제를 수학적 모델링을 통하여 해결하는 것이며, 사용된 수학적 모델은 기하학 모델이다¹⁾.

1) 문제상황

두 사람 A, B가 게임을 한다. 동전을 한 번 던질 때마다 앞면이 나오면 A에게 1점, 뒷면이 나오면 B에게 1점이 주어진다. n점을 먼저 얻는 사람이 피자를 차지한다. 그러나 A, B의 점수가 같지 않은 상태에서 게임이 중단되었다. 어떻게 피자를 나누면 되겠는가? A와 B의 점수 비율로 나누는다는 생각은 옳은가?

2) 문제구성

다음과 같은 상황을 생각해 보자. 10점을 먼저 얻는 사람이 이기는데, 게임이 중단되었을 때 A의 점수는 8점이었고, B의 점수는 7점이었다. 피자는 게임을 이길 확률의 비율로 분배될 것이다.

3) 수학적 모델

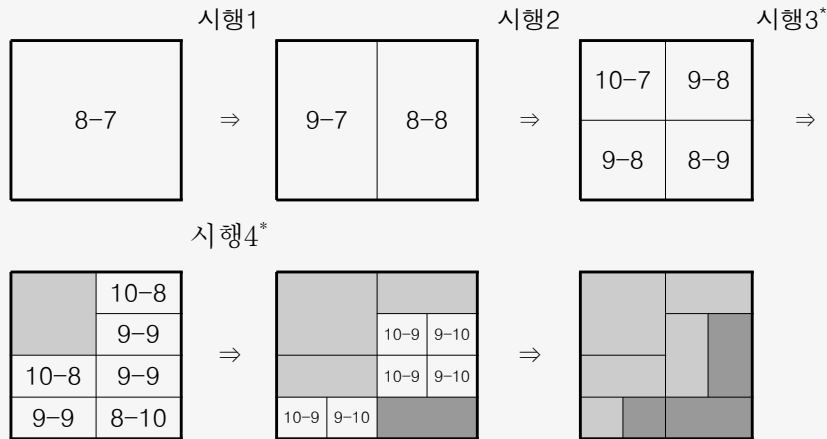
그림1을 보아라. (A가 1점을 얻을 확률)=(B가 1점을 얻을 확률)=1/2. (A가 차지하는 피자의 양)=(A가 10점을 얻을 확률)×피자의 양. (B가 차지하는 피자의 양)=전체 피자의 양-(A가 차지하는 피자의 양). A는 8점, B는 7점을 가지는 게임 상태를 그림으로 나타내어 보아라. 매번 던질 때마다 정사각형 또는 직사각형은 이기는 점수에 대한 확률 $P=1/2$ 을 나타내기 위해 반으로 나누어진다. 이 모델에서 그림은 게임 상태에서 도달한 확률을 나타낸다.

1) Curriculum and evaluation standards for school mathematics



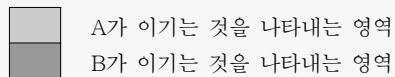
서울대학교
과학교육연구소

모델 내에서의 해(그림 2 참조)



*필요한 경우 A가 10점을 얻을 확률 = $\frac{11}{16}$

그림 2 모델링을 이용한 해



4) 모델 해의 원문제에서의 해석

(A가 차지하는 피자 양) = (피자의 11/16)

(B가 차지하는 피자 양) = (피자의 5/16)

5) 원래의 실세계 문제상황에서의 타당화

그 게임을 실제로 많이 해 보거나 좀더 쉽게 할 수 있는 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 결과로부터 얻을 수 있는 경험적인 증거는 이 해의 타당성을 확인시켜준다.



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소



서울대학교
과학교육연구소